

# Analiza utjecaja veličine i oblika čestica na brzinu neometanog taloženja

---

Nižić, Katarina

Undergraduate thesis / Završni rad

2021

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Split, Faculty of Chemistry and Technology / Sveučilište u Splitu, Kemijsko-tehnološki fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:167:424706>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-05**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of chemistry and technology - University of Split](#)



**SVEUČILIŠTE U SPLITU**

**KEMIJSKO-TEHNOLOŠKI FAKULTET**

**ANALIZA UTJECAJA VELIČINE I OBLIKA ČESTICA NA BRZINU  
NEOMETANOG TALOŽENJA**

**ZAVRŠNI RAD**

**KATARINA NIŽIĆ**

**Matični broj: 1302**

**Split, rujan 2021.**



**SVEUČILIŠTE U SPLITU**  
**KEMIJSKO-TEHNOLOŠKI FAKULTET**  
**PREDDIPLOMSKI STUDIJ KEMIJSKA TEHNOLOGIJA**  
**KEMIJSKO INŽENJERSTVO**

**ANALIZA UTJECAJA VELIČINE I OBLIKA ČESTICA NA BRZINU  
NEOMETANOG TALOŽENJA**

**ZAVRŠNI RAD**

**KATARINA NIŽIĆ**

**Matični broj: 1302**

**Split, rujan 2021.**

**UNIVERSITY OF SPLIT**  
**FACULTY OF CHEMISTRY AND TECHNOLOGY**  
**UNDERGRADUATE STUDY OF CHEMICAL TECHNOLOGY**  
**CHEMICAL ENGINEERING**

**THE INFLUENCE OF PARTICLES SIZE AND SHAPE ON  
UNHINDERED SETTLING VELOCITY**

**BACHELOR THESIS**

**KATARINA NIŽIĆ**

**Parent number: 1302**

**Split, September 2021**

## TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

ZAVRŠNI RAD

Sveučilište u Splitu  
Kemijско-tehnološki fakultet u Splitu  
Preddiplomski studij Kemijсka tehnologija  
Smjer Kemijско inženjerstvo

**Znanstveno područje:** Tehničke znanosti

**Znanstveno polje:** Kemijско inženjerstvo

**Tema rada** je prihvaćena na 6. sjednici Fakultetskog vijeća Kemijско-tehnološkog Fakulteta u Splitu dana 15. i 16. prosinca 2020. godine.

**Mentor:** Prof. dr. sc. Nenad Kuzmanić

**Pomoć pri izradi:** Anita Bašić, dipl. ing.

### ANALIZA UTJECAJA VELIČINE I OBLIKA ČESTICA NA BRZINU NEOMETANOG TALOŽENJA

Katarina Nižić, (1302)

**Sažetak:** U ovom radu određivana je brzina neometanog taloženja sferičnih čestica različitih veličina, ali i onih nepravilnog oblika, tzv. nesferičnih čestica. Brzine taloženja određivane su eksperimentalno u koloni za određivanje brzine taloženja vlastite izvedbe, kao i korištenjem teorijskih izraza, odnosno primjenom  $C_D - Re$  dijagrama. Dobiveni rezultati ukazuju da povećanje veličine sferičnih i nesferičnih čestica, kao i povećanje razlike gustoća između čestica i fluida, značajno utječe na brzinu neometanog taloženja. Analizirano taloženje odvijalo se u prijelaznom hidrodinamičkom području optjecanja, zbog čega nije bio primjenjiv Stokesov zakon za određivanje brzina taloženja. Stoga se kao neminovnost nametnula uporaba  $C_D - Re$  dijagrama. Podaci o brzinama taloženja i veličini čestica dobiveni primjenom  $C_D - Re$  dijagrama pokazuju vrlo dobro slaganje s eksperimentalno dobivenim rezultatima.

**Ključne riječi:** neometano taloženje, brzina taloženja, veličina čestica, oblik čestica

**Rad sadrži:** 64 stranice, 31 sliku, 12 tablica, 20 priloga i 17 literaturnih referenci

**Jezik izvornika:** hrvatski

**Sastav Povjerenstva za obranu:**

1. Prof. dr. sc. Senka Gudić - predsjednik
2. Izv. prof. dr. sc. Marija Čosić - član
3. Prof. dr. sc. Nenad Kuzmanić - član-mentor

**Datum obrane:** 27. rujna 2021. godine

**Rad je u tiskanom i elektroničkom (pdf format) obliku pohranjen u knjižnici Kemijско-tehnološkog fakulteta u Splitu, Ruđera Boškovića 35.**

## BASIC DOCUMENTATION CARD

BACHELOR THESIS

University of Split  
Faculty of Chemistry and Technology Split  
Undergraduate study of Chemical Technology  
Orientation Chemical Engineering

**Scientific area:** Technical Sciences

**Scientific field:** Chemical Engineering

**Thesis subject** was approved by Faculty Council of Faculty of Chemistry and Technology Split, session no. 6. held on December 15<sup>th</sup> and 16<sup>th</sup> 2020.

**Mentor:** Nenad Kuzmanić, PhD, Full prof.

**Technical assistance:** Anita Bašić, M. Eng.

### THE INFLUENCE OF PARTICLES SIZE AND SHAPE ON UNHINDERED SETTLING VELOCITY

Katarina Nižić, (1302)

**Abstract:** In this bachelor thesis, the unhindered settling velocity for spherical particles of different sizes, as well as for those of irregular shapes, the so-called non-spherical particles, was determined. The settling velocities were determined experimentally in the column for determining the settling velocity of our own performance, as well as using theoretical expressions, i.e. using  $C_D - Re$  diagram. The obtained results indicate that the increase in the size of spherical and non-spherical particles, as well as the increase in the density difference between particles and fluid, significantly affects unhindered settling velocity. The analyzed settling took place in the transient hydrodynamic area of circulation, which is why Stokes' law was not applicable for settling velocity determination. Therefore, the use of  $C_D - Re$  diagram was inevitable. Data on the settling velocities and particles size obtained using  $C_D - Re$  diagram show very good agreement with the experimentally obtained results.

**Keywords:** unhindered settling, settling velocity, particle size, particle shape

**Thesis contains:** 64 pages, 31 figures, 12 tables, 20 supplements and 17 references

**Original in:** Croatian

**Defence committee:**

1. Senka Gudić, PhD, full prof. – chair person
2. Marija Ćosić, PhD, associate prof. – member
3. Nenad Kuzmanić, PhD, full prof. – supervisor

**Defence date:** September 27<sup>th</sup>, 2021

**Printed and electronic (pdf format) version of thesis is deposited in** Library of Faculty of Chemistry and Technology Split, Ruđera Boškovića 35.





*Završni rad je izrađen u Zavodu za kemijsko inženjerstvo Kemijsko-tehnološkog fakulteta u Splitu pod mentorstvom prof. dr. sc. Nenada Kuzmanića, u razdoblju od travnja do rujna 2021. godine.*

*Od srca zahvaljujem svome mentoru prof. dr. sc. Nenadu Kuzmaniću na zaista velikoj količini vremena i truda koje mi je posvetio prilikom izrade završnoga rada te mnogobrojnim udijeljenim savjetima i prenesenom znanju tokom cijelog studiranja. Bila mi je velika čast izraditi ovaj rad pod njegovim vodstvom.*

*Također veliko hvala kolegici Aniti Bašić, dipl. ing. na pomoći i veseloj atmosferi u laboratoriju zbog koje će mi eksperimentalna ispitivanja i rad s glicerolom ostati zauvijek u lijepom sjećanju.*

*No najveće hvala dugujem svojoj obitelji bez koje ne bih bila ovdje gdje jesam. Hvala na pruženoj ljubavi, žrtvi, bezuvjetnoj podršci i neizmjernoj vjeri u moj uspjeh.*

*Ovaj rad posvećujem svojim roditeljima, Ivanu i Dijani. Od svih stvari na kojima sam zahvalna u životu, niti jedna nije usporediva s Vama. Hvala!*

*„Ohrabrite se i budite odlučni! Ne bojte se i nemojte predati. Ta sam Bog tvoj ide s tobom; neće te zapustiti niti će te ostaviti.“*

## ZADATAK ZAVRŠNOG RADA

1. Ispitati utjecaj promjera sferičnih čestica na brzinu neometanog taloženja u vodenoj otopini glicerola. Eksperimentalna istraživanja izvršiti s četiri sferične čestice različitih veličina u koloni za određivanje brzine taloženja.
2. Brzinu taloženja sferičnih čestica odrediti teorijskim putem primjenom  $C_D - Re$  dijagrama i uobičajenih izraza za brzinu taloženja. Izvršiti usporedbu eksperimentalnih i teorijski određenih vrijednosti brzina taloženja.
3. Odrediti promjer dviju sferičnih čestica poznate brzine taloženja eksperimentalno i teorijski te izvršiti usporedbu dobivenih rezultata.
4. Za tri nesferične čestice različitih oblika eksperimentalno i teorijski odrediti brzinu taloženja te izvršiti usporedbu dobivenih rezultata.
5. Za nesferičnu česticu poznate brzine taloženja eksperimentalno i teorijski odrediti njen ekvivalentni promjer.
6. Eksperimentalno ispitati utjecaj razlike gustoća analiziranih čvrstih čestica i korištenog fluida na brzinu taloženja sferičnih i nesferičnih čestica. Dobivene rezultate usporediti s onima dobivenima teorijskim putem.

# SAŽETAK

## Analiza utjecaja veličine i oblika čestica na brzinu neometanog taloženja

U ovom radu određivana je brzina neometanog taloženja sferičnih čestica različitih veličina, ali i onih nepravilnog oblika, tzv. nesferičnih čestica. Brzine taloženja određivane su eksperimentalno u koloni za određivanje brzine taloženja vlastite izvedbe, kao i korištenjem teorijskih izraza, odnosno primjenom  $C_D - Re$  dijagrama.

Dobiveni rezultati ukazuju da povećanje veličine sferičnih i nesferičnih čestica, kao i povećanje razlike gustoća između čestica i fluida, značajno utječe na brzinu neometanog taloženja. Analizirano taloženje odvijalo se u prijelaznom hidrodinamičkom području optjecanja, zbog čega nije bio primjenjiv Stokesov zakona za određivanje brzina taloženja. Stoga se kao neminovnost nametnula uporaba  $C_D - Re$  dijagrama.

Podaci o brzinama taloženja i veličini čestica dobiveni primjenom  $C_D - Re$  dijagrama pokazuju vrlo dobro slaganje s eksperimentalno dobivenim rezultatima.

### **Ključne riječi:**

neometano taloženje, brzina taloženja, veličina čestica, oblik čestica

## **SUMMARY**

### **The influence of particles size and shape on unhindered settling velocity**

In this bachelor thesis, the unhindered settling velocity for spherical particles of different sizes, as well as for those of irregular shapes, the so-called non-spherical particles, was determined. The settling velocities were determined experimentally in the column for determining the settling velocity of our own performance, as well as using theoretical expressions, i.e. using  $C_D - Re$  diagram.

The obtained results indicate that the increase in the size of spherical and non-spherical particles, as well as the increase in the density difference between particles and fluid, significantly affects unhindered settling velocity. The analyzed settling took place in the transient hydrodynamic area of circulation, which is why Stokes' law was not applicable for settling velocity determination. Therefore, the use of  $C_D - Re$  diagram was inevitable.

Data on the settling velocities and particles size obtained using  $C_D - Re$  diagram show very good agreement with the experimentally obtained results.

#### **Keywords:**

unhindered settling, settling velocity, particle size, particle shape

# SADRŽAJ

UVOD.....	1
1. OPĆI DIO .....	2
1.1. Optjecanje.....	3
1.2. Ukupni otpor čvrstog tijela pri optjecanju .....	5
1.2.1. Faktor otpora pri optjecanju.....	8
1.2.2. Faktor oblika čvrstog tijela .....	10
1.3. Određivanje brzine taloženja čvrstih čestica kroz fluid .....	12
2. EKSPERIMENTALNI DIO.....	19
2.1. Opis aparature i provedba eksperimenta.....	20
2.2. Teorijsko određivanje brzine taloženja čestica poznatog promjera primjenom $C_D - Re$ dijagrama.....	26
2.3. Određivanje promjera čestica poznate brzine taloženja primjenom $C_D - Re$ dijagrama .....	28
2.4. Određivanje ekvivalentnog promjera nesferične čestice i njenog faktora oblika (sfericiteta) .....	30
3. REZULTATI.....	32
3.1. Utjecaj promjera sferičnih čestica na brzinu taloženja.....	33
3.2. Utjecaj razlike gustoća na brzinu taloženja sferičnih čestica .....	36
3.3. Određivanje promjera sferičnih čestica poznate brzine taloženja .....	38
3.3.1. Eksperimentalno određene vrijednosti brzine taloženja sferičnih čestica nepoznatog promjera .....	38
3.3.2. Određivanje promjera sferičnih čestica poznate brzine taloženja primjenom $C_D - Re$ dijagrama .....	39
3.4. Određivanje brzine taloženja nesferičnih čestica.....	41

3.4.1. Eksperimentalno određene vrijednosti brzine taloženja nesferičnih čestica .....	41
3.4.2. Određivanje brzine taloženja nesferičnih čestica poznatog promjera primjenom $C_D - Re$ dijagrama .....	42
3.5. Određivanje ekvivalentnog promjera nesferične čestice poznate brzine taloženja .....	45
3.5.1. Eksperimentalno određene vrijednosti brzina taloženja nesferičnih čestica nepoznatog ekvivalentnog promjera .....	45
3.5.2. Određivanje ekvivalentnog promjera nesferične čestice poznate brzine taloženja primjenom $C_D - Re$ dijagrama .....	46
3.6. Utjecaj razlike gustoća na brzinu taloženja nesferičnih čestica .....	47
4. RASPRAVA .....	51
5. ZAKLJUČCI .....	58
6. LITERATURA .....	60
7. PRILOZI .....	63

## UVOD

U brojnim jediničnim operacijama procesnog inženjerstva, kao što su gravitacijsko i centrifugalno taloženje, suspendiranje, kristalizacija itd., neizostavno je poznavanje fizikalnih karakteristika čvrstih čestica koje u tim operacijama sudjeluju. Tu se prije svega misli na brzinu taloženja čestica jer upravo taj podatak u znatnoj mjeri diktira način provođenja navedenih operacija, kao i način njihove kontrole, odnosno optimizacije.

Taloženje čvrstih čestica u fluidu se inače klasificira kao podvrsta optjecanja. Naime, optjecanje je pojava strujanja fluida oko čvrstog tijela. Postoji mogućnost da je tijelo uronjeno i nepokretno u struji fluida ili da se ono giba u mirujućem fluidu. Za obje pojave pravilnosti su istovjetne. Bitno je samo da postoji relativna brzina između tijela i fluida.

Ovisno o fizikalnim karakteristikama čvrstih čestica i fluida, te masenom udjelu čestica u analiziranom heterogenom sustavu taloženje može biti ometano i neometano. Ukoliko su čestice dovoljno udaljene jedna od druge tako da ne dolazi do preklapanja brzinskih profila koji se formiraju u njihovoj neposrednoj brzini, taloženje se smatra neometanim. U protivnome ono je ometano.

U ovom radu će se analizirati utjecaj veličine sferičnih čestica, kao i utjecaj oblika čestica, isključivo na brzinu neometanog taloženja. Također će se ispitati utjecaj pokretačke sile taloženja, tj. razlike gustoća između čestica i fluida u kojem se provodi taloženje na tu veličinu. Eksperimentalna ispitivanja će se provoditi u aparaturi vlastite izvedbe, a dobiveni rezultati će biti uspoređivani s onima dobivenima teorijskim izrazima.



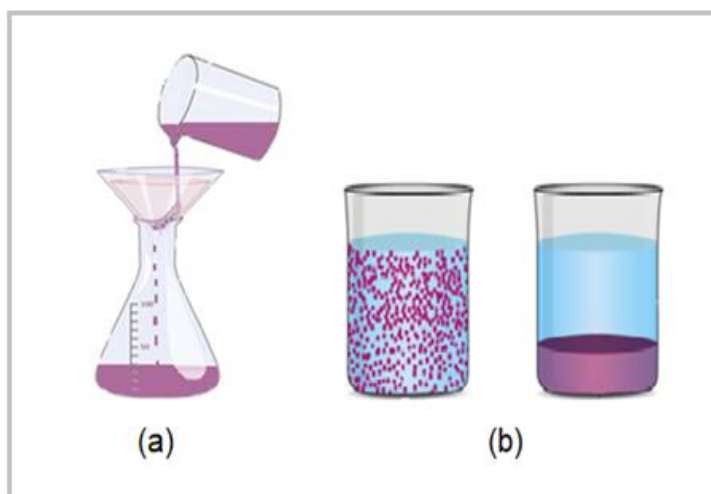
## 1. OPĆI DIO

## 1.1. Optjecanje

Optjecanje je pojava relativnog gibanja čvrstog tijela i fluida koja se može odvijati tako da fluid nastrujava oko čvrstog nepokretnog tijela ili na način da se čvrsto tijelo giba u mirujućem sloju fluida potpuno ili djelomično uronjeno u njega. U oba slučaja pravilnosti su identične. Bitno je da postoji relativna brzina gibanja između čvrstog tijela i fluida u kojem je to čvrsto tijelo uronjeno.

Optjecanje je temelj brojnih jediničnih operacija kemijske industrije poput gravitacijskog i centrifugalnog taloženja, filtracije, kristalizacije, fluidizacije te brojnih katalitičkih procesa i procesa obrade otpadnih voda.

Na slici 1. ilustrirano je optjecanje na primjeru mehaničkih operacija filtracije i gravitacijskoga taloženja. Dok se kod filtracije strujanje fluida odvija oko čvrstog nepokretnog sloja čestica, kod gravitacijskog taloženja čvrste čestice se gibaju u mirujućem sloju fluida.



**Slika 1.** Primjeri optjecanja - mehanička operacija filtracije (a) i gravitacijsko taloženje (b) <sup>1,2</sup>.

Ovisno o vrijednosti Reynoldsove značajke,  $Re$ , koja u slučaju optjecanja ima oblik:

$$Re = \frac{v_r \cdot L \cdot \rho_f}{\mu_f} \quad (1)$$

a pri čemu je:

$v_r$  – relativna brzina, ( $\text{m s}^{-1}$ ),

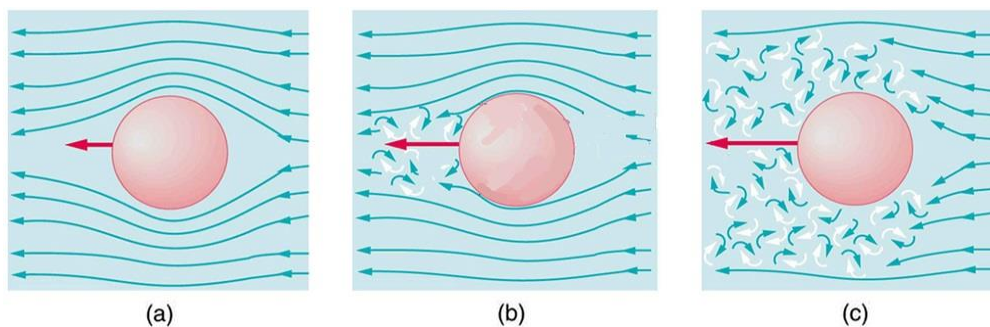
$L$  – karakteristična linearna dimenzija čvrstog tijela, (m),

$\rho_f$  – gustoća fluida, ( $\text{kg m}^{-3}$ ),

$\mu_f$  – dinamička viskoznost fluida, ( $\text{Pa s}$ ),

razlikuju se tri vrste optjecanja (slika 2):

- laminarno ili slojevito optjecanje,
- prijelazno optjecanje i
- turbulentno ili vrtložno optjecanje.



**Slika 2.** Laminarno (a), prijelazno (b) i turbulentno optjecanje (c) <sup>3</sup>.

Optjecanje je laminarno ukoliko se čvrste čestice gibaju takvom brzinom kroz fluid da ne izazivaju veće poremećaje u strukturi toka fluida. Ono se odvija pri malim vrijednostima Reynoldsove značajke ( $Re < 1$ ) i najčešće je vezano uz sitne čvrste čestice koje se gibaju malim brzinama kroz fluid.

S druge strane, optjecanje je turbulentno ukoliko čvrste čestice pri svom gibanju kroz fluid izazivaju poremećaje u njegovoj strukturi. Uz poremećaje u strukturi fluida nastaju i mrtve zone neposredno iza čestica, a u kojima se stvaraju vrtlozi. Turbulentno optjecanje odvija se pri većim vrijednostima Reynoldsove značajke ( $Re > 1000$ ) i najčešće je vezano za velike čvrste čestice koje se gibaju većim brzinama kroz fluid.

Između ova dva granična slučaja nalazi se prijelazno optjecanje koje se odvija pri vrijednostima Reynoldsove značajke  $1 < Re < 1000$ . Karakterizira ga djelomično narušavanje slojevitosti i posljedično miješanje slojeva fluida <sup>4,5</sup>.

## 1.2. Ukupni otpor čvrstog tijela pri optjecanju

Pri gibanju fluida oko čvrstog tijela, ili obrnuto, uvijek se javlja sila otpora,  $F_D$ , kao posljedica površinskog otpora, tj. viskoznog trenja i otpora koji je vezan uz oblik tijela <sup>6,7</sup>:

$$F_D = F_{tr} + F_i \quad (2)$$

gdje je:

$F_D$  – sila otpora pri optjecanju, (N),

$F_{tr}$  – sila površinskog trenja, (N),

$F_i$  – sila otpora oblika, (N).

U laminarnom području, gdje su vrijednosti Reynoldsove značajke vrlo male, tj.  $Re < 1$ , sila otpora pri optjecanju, prema Stokesu, jednaka je:

$$F_D = 3 \cdot \pi \cdot \mu_f \cdot L \cdot v_r \quad (3)$$

Ako se čvrsta čestica giba veoma sporo kroz fluid, oko takve čestice se stvara laminarni granični sloj čija je debljina relativno velika. Otpor koji se javlja pri takvom optjecanju pretežno nastaje uslijed površinskog trenja tog graničnog sloja. Dakle, glavni otpor u ovom slučaju proizlazi uslijed površinskog trenja. Otpor uslijed oblika prisutan je u znatno manjoj mjeri (1/3) i kod najmanjih brzina, kao što je prikazano sljedećim izrazom:

$$F_D = 2 \cdot \pi \cdot \mu_f \cdot L \cdot v_r + \pi \cdot \mu_f \cdot L \cdot v_r \quad (4)$$

U turbulentnom području, kojeg karakteriziraju velike vrijednosti Reynoldsove značajke, tj.  $Re > 1000$ , ne vrijede zakonitosti koje vrijede u laminarnom području.

Zbog kompleksnosti ovakvog sustava neophodno je uvođenje dimenzijske analize:

$$F_D = f(v, \rho_f, \mu_f, d_{\check{c}}, \psi)$$

Sila otpora pri optjecanju za sva područja Reynoldsovih značajki ovisi o brzini, fizikalnim karakteristikama fluida, promjeru čvrstih čestica i njihovom obliku.

Budući da navedene varijable i simpleks utječu na vrijednost sile otpora, postavlja se jednadžba:

$$F_D = k \cdot v^a \cdot \rho_f^b \cdot \mu_f^c \cdot d_{\check{c}}^e \cdot (\psi)^f \quad (5)$$

Ako se varijable izraze u MLT dimenzijskom sustavu dobije se:

$$[M \cdot L \cdot T^{-2}] = [L \cdot T^{-1}]^a \cdot [M \cdot L^{-3}]^b \cdot [M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}]^c \cdot [L]^e \quad (6)$$

Izjednačavanjem eksponenata na istovrsnim dimenzijama dobiju se tri jednadžbe s četiri nepoznanice. Takav sustav se u pravilu ne može riješiti, no budući da se u sve tri jednadžbe pojavljuje nepoznanica „c“ svi eksponenti se mogu izraziti preko nje, čime se dobije:

$$M: 1 = b + c \quad b = 1 - c$$

$$L: 1 = a - 3b - c + e \quad a = 2 - c$$

$$T: -2 = -a - c \quad e = 2 - c$$

Uvođenjem ovih eksponenata u jednadžbu (5), ona poprima oblik:

$$F_D = k \cdot v^{(2-c)} \cdot \rho_f^{(1-c)} \cdot \mu_f^c \cdot d_{\check{c}}^{(2-c)} \cdot (\psi) \quad (7)$$

Grupiranjem varijabli istog eksponenta dobije se:

$$\frac{F_D}{v^2 \cdot \rho_f \cdot d_{\check{c}}^2} = k \left[ \frac{\mu_f}{v \cdot d_{\check{c}} \cdot \rho_f} \right]^c \cdot \psi^f \quad (8)$$

Postavljanjem sile otpora pri optjecanju u omjer s kvadratom promjera čestice može se doći do jednakosti:

$$\frac{F_D}{d_\zeta^2} = \frac{F_D}{A} = \tau = \Delta p \quad (9)$$

A kako vrijedi da je:

$$\frac{\mu_f}{v \cdot d_\zeta \cdot \rho_f} = \frac{1}{Re} \quad (10)$$

Jednadžba (8) se, koristeći gore navedene izraze, može napisati u obliku Eulerove značajke za koju vrijedi sljedeća ovisnost:

$$\frac{\tau}{v^2 \cdot \rho_f} = \frac{\Delta p}{v^2 \cdot \rho_f} = Eu = f(Re, \psi) \quad (11)$$

Jednadžba (11) se onda može napisati kao:

$$\tau = f(Re, \psi) \cdot v^2 \cdot \rho_f \quad (12)$$

Dogovorom je uvedena funkcionalna ovisnost:

$$f(Re, \psi) = \frac{C_D}{2}$$

te njenim uvrštavanjem u jednadžbu (12) moguće je silu otpora pri optjecanju napisati kao:

$$F_D = C_D \cdot A \times \frac{v^2 \cdot \rho_f}{2} \quad (13)$$

gdje je član  $C_D$  faktor otpora, a  $A$  projicirana površina okomita na smjer strujanja fluida.























Time je izveden opći izraz za silu otpora pri optjecanju koji vrijedi za sve vrijednosti Reynoldsovih značajki.

### 1.2.1. Faktor otpora pri optjecanju

Faktor otpora pri optjecanju,  $C_D$ , je bezdimenzijska veličina koja se koristi za kvantificiranje otpora nekog čvrstog tijela u fluidnom okruženju, a može se izraziti kao:

$$C_D = \frac{2 \cdot F_D}{A \cdot v^2 \cdot \rho_f} \quad (14)$$

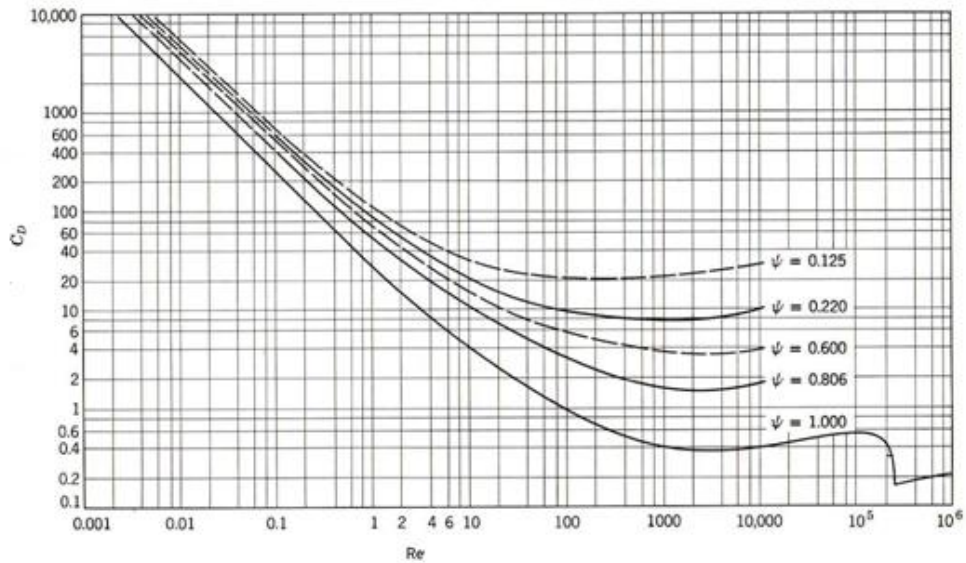
Približne vrijednosti koeficijenta otpora za tijela različitih oblika su prikazane na slici 3.

	0.38		1.16
	0.42		1.17
	0.47		1.20
	0.50		1.55
	0.59		1.55
	0.80		1.60
	1.05		1.98
	1.17		2.00
	1.17		2.05
	1.38		2.20
	1.42		2.30

**Slika 3.** Vrijednosti koeficijenta otpora,  $C_D$ , za tijela raznih oblika <sup>8</sup>.

Nadalje, zanimljiva činjenica vezana za faktor otpora je ta što on na neki način predstavlja mjeru aerodinamičnosti tijela. Što je njegova vrijednost niža, tijelo će pružati manji aerodinamički ili hidrodinamički otpor, i obratno.

Faktor otpora,  $C_D$ , ovisi o Reynoldsovoj značajci i obliku tijela, tj. sfericitetu,  $\psi$ . Taj odnos prikazan je  $C_D - Re$  dijagramom (slika 4) <sup>9</sup>:



**Slika 4.** Ovisnost faktora otpora o  $Re$ -značajci za tijela različitih oblika.

U laminarnom području ( $Re < 1$ ) faktor otpora ovisi samo o Reynoldsovoj značajci. Količina gibanja se prenosi pretežno molekularnim mehanizmom. Gubitak energije nastaje uslijed površinskog trenja, ali i dijelom uslijed otpora oblika. Izjednačavanjem jednadžbi (3) i (13) moguće je dobiti ovisnost faktora otpora o Reynoldsovoj značajci u laminarnom području:

$$F_{D,lamin} = F_{D,opći}$$

$$3 \cdot \pi \cdot \mu_f \cdot d_{\check{c}} \cdot v = C_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \cdot \rho_{\check{c}}}{2}$$

$$C_D = \frac{24 \cdot \mu_f}{v \cdot d_{\check{c}} \cdot \rho_f}$$

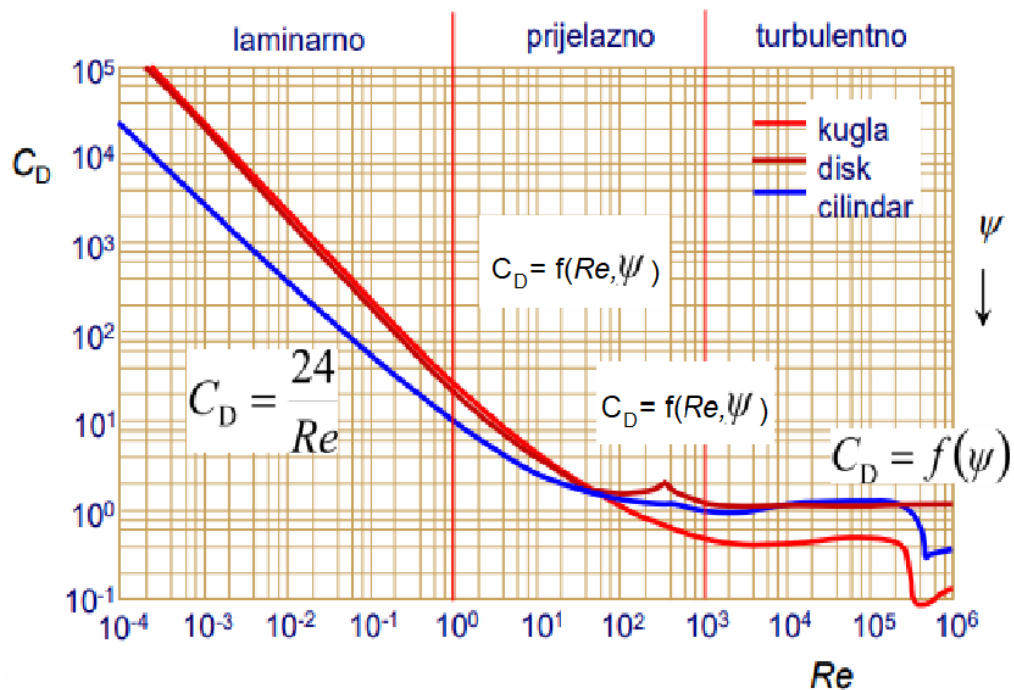
$$C_D = \frac{24}{Re} \quad (15)$$

U prijelaznom ( $1 < Re < 1000$ ) i turbulentnom području ( $Re > 1000$ ) količina gibanja prenosi se molekularnim i vrtložnim mehanizmom. U ovom slučaju dominantan je otpor uslijed oblika tijela uronjenog u fluid, a faktor otpora,  $C_D$ , ovisi i o Reynoldsovoj značajci i o sfericitetu,  $\psi$ .



U području razvijene turbulencije količina gibanja prenosi se samo vrtložnim mehanizmom tako da su vrijednosti faktora otpora konstantne. Tada faktor otpora ovisi samo o sfericitetu.

Za razliku od Moodyjevog dijagrama, ovisnost faktora otpora o Reynoldsovoj značajki je kontinuirana funkcija budući da su oba uzroka gubitka energije (površinsko trenje i otpor oblika) istovremeno prisutni u cijelom području Reynoldsovih značajki. Sve navedeno vidljivo je na slici 5.



**Slika 5.** Ovisnost faktora otpora,  $C_D$ , o Reynoldsovoj značajki za različita hidrodinamička područja optjecanja <sup>8</sup>.

### 1.2.2. Faktor oblika čvrstog tijela

Faktor oblika ili sfericitet,  $\psi$ , je bezdimenzijska veličina koja predstavlja mjeru sličnosti oblika nekog čvrstog tijela s oblikom kugle. Vrijednost sfericiteta za bilo koje čvrsto tijelo uvijek je manja ili jednaka jedinici, odnosno vrijedi  $\psi \leq 1$  <sup>10</sup>.

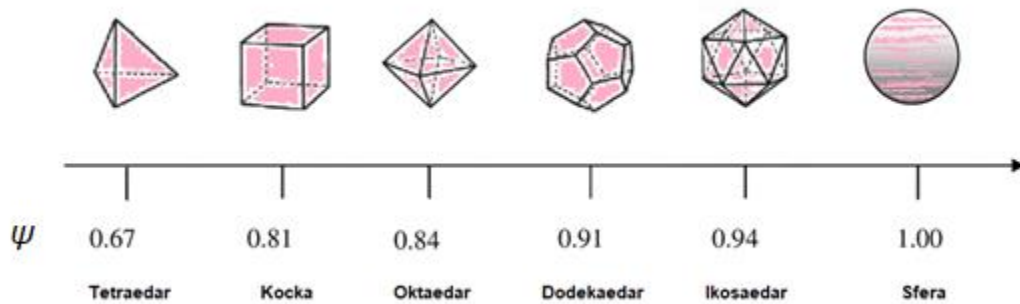
Sfericitet se definira kao omjer oplošja, tj. površine zamišljene kugle koja ima isti volumen kao ispitivano tijelo i površine ispitivanog tijela:

$$\psi = \frac{S_{kugle}}{S_{tijela}} \quad (16)$$

uz uvjet da je:

$$V_{kugle} = V_{tijela} \quad (17)$$

Vrijednosti faktora oblika za različita geometrijska tijela dane su na slici 6.



**Slika 6.** Vrijednosti sfericiteta za različita geometrijska tijela <sup>11</sup>.

Ukoliko tijelo nije sferičnog oblika, pri karakterizaciji njegove veličine potrebno je odrediti njegov ekvivalentni promjer. On predstavlja promjer zamišljene kugle koja ima isti volumen kao i tijelo nepravilnog oblika:

$$V_{kugle} = V_{tijela}$$

$$\frac{d^3 \cdot \pi}{6} = V_{tijela}$$

iz čega proizlazi:

$$d_{ekv.} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot V_{tijela}}{\pi}} \quad (18)$$

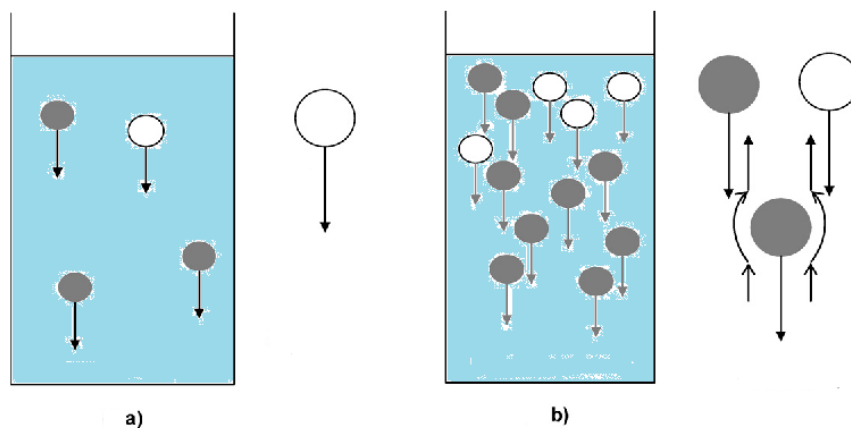
Reynoldsova značajka za nesferično tijelo definira se onda na sljedeći način:

$$Re = \frac{v \cdot d_{ekv.} \cdot \rho_f}{\mu_f} \quad (19)$$

### 1.3. Određivanje brzine taloženja čvrstih čestica kroz fluid

U brojnim jediničnim operacijama procesnog inženjerstva, kao što su gravitacijsko i centrifugalno taloženje, suspendiranje, kristalizacija itd., neizostavno je poznavanje fizikalnih karakteristika čvrstih čestica koje u tim operacijama sudjeluju. Tu se prije svega misli na brzinu taloženja čestica jer upravo taj podatak u znatnoj mjeri diktira način provođenja navedenih operacija, kao i način njihove kontrole, odnosno optimizacije.

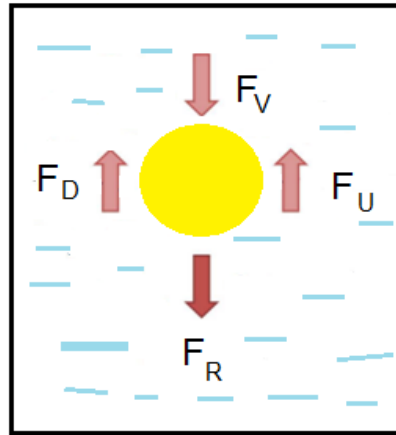
Prilikom gibanja čvrstih čestica kroz mirujući fluid, svaka čestica povlači za sobom dio fluida, a razlog tome je viskoznost koja uzrokuje otpor gibanju čestica kroz taj fluid. Time se, uz gibanje čvrstih čestica, javlja i strujanje pojedinih slojeva fluida različitim brzinama te dolazi do formiranja određenog brzinskog profila za svaku česticu. Svaki brzinski profil obuhvaća brzinu taloženja čestice i sve brzine strujanja slojeva fluida koje je ta čestica povukla za sobom prilikom taloženja <sup>12,13</sup>.



**Slika 7.** Ponašanje čestica prilikom neometanog (a) i ometanog taloženja (b) <sup>14</sup>.

Ovisno o fizikalnim karakteristikama čvrstih čestica i fluida, te masenom udjelu čestica u analiziranom heterogenom sustavu taloženje može biti ometano i neometano. Ukoliko su čestice dovoljno udaljene jedna od druge tako da ne dolazi do preklapanja brzinskih profila koji se formiraju u njihovoj neposrednoj brzini, taloženje se smatra neometanim. U protivnome ono je ometano.

Kako bi se izveo izraz za brzinu neometanog taloženja čestica, potrebno je ustanoviti odnose sila koje djeluju na česticu koja se taloži u fluidu. Iz tog razloga se prvo postavlja bilanca sila.



**Slika 8.** Sile koje djeluju na čvrstu česticu tijekom njenog gibanja kroz fluid.

Na čvrstu česticu u gibanju kroz fluid djeluju tri sile: vanjska sila  $F_V$ , sila uzgona  $F_U$  i sila hidrodinamičkog otpora  $F_D$ . Da bi se čvrsta čestica mogla gibati u nekom fluidu, na nju treba djelovati vanjska sila  $F_V$  koja uzrokuje taloženje (gravitacijska sila, centrifugalna sila itd.) <sup>15</sup>:

$$F_V = m_{\xi} \cdot a \quad (20)$$

Djelovanju vanjske sile  $F_V$ , suprotstavljaju se druge dvije sile: sila uzgona  $F_U$  i sila otpora  $F_D$ :

$$F_U = m_f \cdot a = \frac{m_{\xi}}{\rho_{\xi}} \cdot \rho_f \cdot a \quad (21)$$

$$F_D = C_D \cdot A \cdot \frac{v_t^2 \cdot \rho_f}{2} \quad (22)$$

Suma svih navedenih sila daje rezultatnu silu  $F_R$ :

$$F_R = m_{\check{c}} \cdot a = m_{\check{c}} \cdot \frac{dv_t}{dt} \quad (23)$$

Hoće li se neka čestica taložiti, lebdjeti ili pak plutati na površini fluida ovisi o iznosima navedenih sila.

Suma svih prisutnih sila mora biti jednaka nuli kako nalaže zakon o očuvanju količine gibanja:

$$\sum_{i=1}^N F_i = 0 \quad (24)$$

Kada se zakon o očuvanju količine gibanja primijeni na taloženje čestica dobije se:

$$F_R = F_V - F_U - F_D$$

$$m_{\check{c}} \cdot \frac{dv_t}{dt} = m_{\check{c}} \cdot a - \frac{m_{\check{c}}}{\rho_{\check{c}}} \cdot \rho_f \cdot a - C_D \cdot A \cdot \frac{v_t^2 \cdot \rho_f}{2} / \div m_{\check{c}}$$

Sređivanjem gornjeg izraza dobiva se:

$$\frac{dv_t}{dt} = a - \frac{\rho_f}{\rho_{\check{c}}} \cdot a - C_D \cdot A \cdot \frac{v_t^2 \cdot \rho_f}{2 \cdot m_{\check{c}}}$$

odnosno :

$$\frac{dv_t}{dt} = a \cdot \left[ 1 - \frac{\rho_f}{\rho_{\check{c}}} \right] - C_D \cdot A \cdot \frac{v_t^2 \cdot \rho_f}{2 \cdot m_{\check{c}}} \quad (25)$$

Čestice se u početku gibaju ubrzano, ali nakon izjednačavanja sila poprimaju određenu konstantnu brzinu koja se označava kao brzina taloženja,  $v_t$ . Dakle, od tog trenutka:

$$v_t = konst$$

odnosno:

$$\frac{dv_t}{dt} = 0$$

Daljnje gibanje čestica se odvija samo pod utjecajem gravitacijske sile ( $a = g$ ) :

$$\left[1 - \frac{\rho_f}{\rho_c}\right] \cdot g = C_D \cdot A \cdot \frac{v_t^2 \cdot \rho_f}{2 \cdot m_c} \quad (26)$$

U slučaju taloženja sferne čestice, odnosno čestice oblika kugle vrijedi:

$$A = \frac{d_c^2 \cdot \pi}{4} \quad (27)$$

$$m_c = V_c \cdot \rho_c = \frac{d_c^3 \cdot \pi}{6} \cdot \rho_c \quad (28)$$

Uvrštavanjem izraza (27) i (28) u bilancu sila, dobiva se izraz za brzinu neometanog gravitacijskog taloženja čestica u fluidu koji vrijedi za cijelo područje vrijednosti Reynoldsove značajke:

$$v_t = \sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot d_c \cdot (\rho_c - \rho_f)}{3 \cdot C_D \cdot \rho_f}} \quad (29)$$

Brzinu taloženja čestica moguće je izračunati ako je poznat faktor otpora  $C_D$ . Taj faktor određen je eksperimentalno za čestice različitih oblika i gustoća pri čemu je ustanovljeno da je faktor otpora funkcija Reynoldsove značajke. Tako je, u biti, dobivena prethodno prikazana funkcionalna ovisnost  $C_D - Re$ .

Za **laminarno područje optjecanja** ( $1 < Re$ ), umjesto  $C_D$  u izrazu (29) može se uvrstiti odnos (15):

$$C_D = \frac{24}{Re} = \frac{24 \cdot \mu_f}{v_t \cdot d_c \cdot \rho_f}$$

iz čega proizlazi:

$$v_t = \frac{d_c^2 \cdot (\rho_c - \rho_f) \cdot g}{18 \cdot \mu_f} \quad (30)$$

Dobiveni izraz predstavlja brzinu taloženja čestica u nekom fluidu u laminarnom području pod djelovanjem gravitacijskog polja i naziva se Stokesovim zakonom, a vrijedi isključivo za čvrste čestice oblika kugle ( $\psi = 1$ ) te za neometano taloženje u laminarnom području ( $Re < 1$ ).

U **turbulentnom području optjecanja**, koje obuhvaća vrijednosti Reynoldsove značajke veće od 1000, faktor otpora  $C_D$  poprima konstantnu vrijednost i iznosi 0,43. Ako se ta vrijednost uvrsti u izraz (29) dobije se tzv. Newtonov izraz za određivanje brzine neometanog taloženja sferičnih čestica za turbulentno područje:

$$v_t = 1,76 \cdot \sqrt{\frac{g \cdot d_c \cdot (\rho_c - \rho_f)}{\rho_f}} \quad (31)$$

U **prijelaznom području optjecanja** ( $1 < Re < 1000$ ) za određivanje brzine taloženja čestica primjenjuje se jednadžba (29) koja vrijedi za cijelo područje Reynoldsove značajke uz primjenu  $C_D - Re$  dijagrama<sup>16,17</sup>.

Sređivanjem i logaritmiranjem izraza (29) dobije se:

$$\log C_D = \log \left[ \frac{4 \cdot g \cdot d_c^3 \cdot \rho_f \cdot (\rho_c - \rho_f)}{3 \cdot \mu_f^2} \right] - 2 \cdot \log Re \quad (32)$$

Dobivena jednadžba predstavlja jednadžbu pravca s nagibom -2 u koordinatnom sustavu  $\log C_D - \log Re$ . Izdvajanjem člana u zagradi:

$$A_v = \frac{4 \cdot g \cdot d_c^3 \cdot \rho_f \cdot (\rho_c - \rho_f)}{3 \cdot \mu_f^2} \quad (33)$$

Jednadžba (32) poprima oblik:

$$\log C_D = -2 \log Re + \log A_v \quad (34)$$

Član  $A_v$  se računa pomoću podataka koji se odnose na suspenziju. Potom se nacrtava pravac u dijagramu  $\log C_D - \log Re$  koji prolazi kroz jednu proizvoljnu točku  $(Re_1, C_{D,1})$  sa zadanim koeficijentom smjera -2. Iz sjecišta tog pravca i krivulje za odgovarajući sfericitet ( $\psi$ ) spusti se okomica do apscise i očita pripadajuća Reynoldsova značajka. Iz nje se potom odredi brzina taloženja čestica  $v_t$ .

U praksi se često javlja potreba za određivanjem promjera ispitivanih čestica na temelju poznate brzine taloženja i poznatih fizikalnih karakteristika fluida.

Postupak određivanja nepoznatog promjera čestica na temelju poznate brzine taloženja sličan je prethodno opisanom postupku. Također se polazi od izraza (29) za brzinu neometanog gravitacijskog taloženja čestica:

$$v_t = \sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot d_c \cdot (\rho_c - \rho_f)}{3 \cdot C_D \cdot \rho_f}}$$

Potom se iz gornje jednadžbe izdvaja faktor otpora  $C_D$  i izvrši logaritmiranje:

$$C_D = \frac{4 \cdot g \cdot d_c \cdot (\rho_c - \rho_f)}{3 \cdot v_t^2 \cdot \rho_f} / \log$$

Daljnijim sređivanjem izraza dobije se jednadžba pravca s nagibom +1 u koordinatnom sustavu  $\log C_D - \log Re$ :

$$\log C_D = \log \left[ \frac{4 \cdot g \cdot \mu_f \cdot (\rho_c - \rho_f)}{3 \cdot v_t^3 \cdot \rho_f^2} \right] + \log Re \quad (35)$$

$$A_d = \frac{4 \cdot g \cdot \mu_f \cdot (\rho_c - \rho_f)}{3 \cdot v_t^3 \cdot \rho_f^2} \quad (36)$$

$$\log C_D = \log Re + \log A_d \quad (37)$$



Član  $A_d$  se računa pomoću podataka koji se odnose na suspenziju. Potom se nacrtá pravac u dijagramu  $\log C_D - \log Re$  koji prolazi kroz točku  $(Re_1, C_{D,1})$  sa zadanim koeficijentom smjera +1. Iz sjecišta tog pravca i krivulje za odgovarajući sfericitet ( $\psi$ ) spusti se okomica do apscise i očita pripadajuća Reynoldsova značajka. Iz nje se potom odredi promjer čestice  $d_c$ .

## **2. EKSPERIMENTALNI DIO**

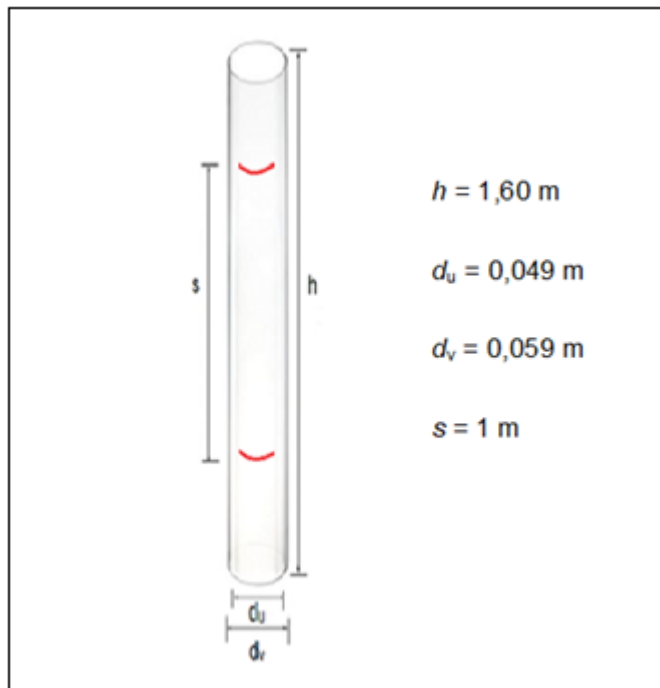
## 2.1. Opis aparature i provedba eksperimenta

Eksperimentalni dio ovog rada, a koji se odnosi na analizu utjecaja veličine i oblika čestica na brzinu neometanog taloženja, provodio se u aparaturi prikazanoj na slici 9.



**Slika 9.** Kolona za provedbu eksperimentalnih ispitivanja.

Osnovni dio aparature je prozirna cijev od pleksiglasa visine 1,60 m i unutarnjeg promjera 0,049 m. Na vrhu te kolone nalazi se otvor sa zatvaračem koji služi za ulijevanje fluida u kojem će se odvijati taloženje, kao i za uvođenje čvrstih čestica čija se brzina taloženja određuje. Kolona je klemama učvršćena na metalni stalak tako da stoji uspravno i da se može zakretati za 180°. Na vanjskoj stijenci kolone obilježena je udaljenost od 1 m koju čestice čije se brzine taloženja određuju trebaju prijeći (slika 10).

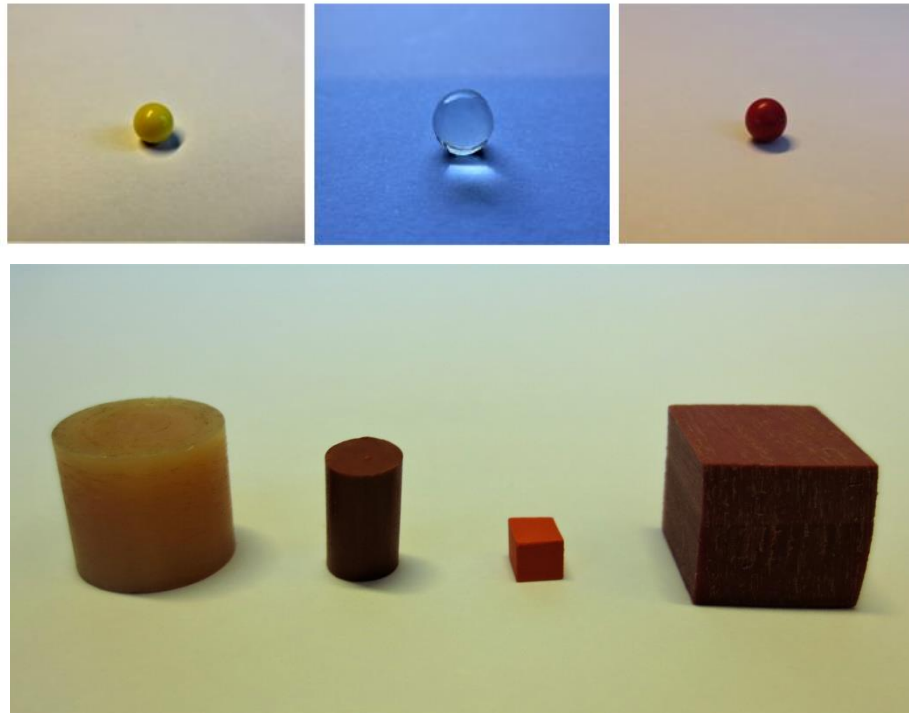


**Slika 10.** Geometrijske karakteristike kolone za određivanje brzine taloženja.

Ekspерiment se provodio tako da se u kolonu napunjenu vodenom otopinom glicerola poznate koncentracije, gustoće i viskoznosti pri sobnoj temperaturi ubacuje čvrsta čestica te se mjeri vrijeme koje je istoj potrebno da prijeđe označenu udaljenost.

Na dnu kolone nalazi se pokretno metalno sito koje služi za prikupljanje istaloženih čestica.

Tijekom eksperimenta korištene su čestice različitih oblika i veličina, a koje su prikazane na slici 11.



**Slika 11.** Sferične i nesferične čestice korištene tijekom eksperimenta.

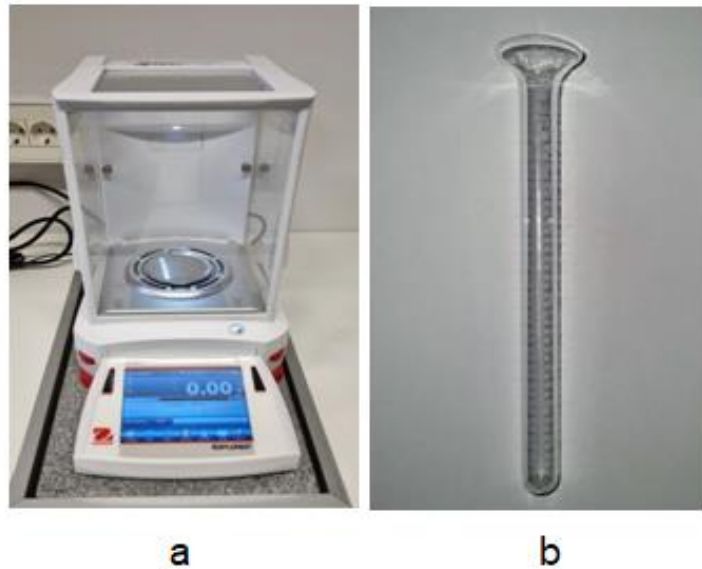
Prije provedbe eksperimenta mikrometarskim vijkom, prikazanim na slici 12, određivane su karakteristične linearne dimenzije čvrstih čestica.



**Slika 12.** Lux-tools Comfort mikrometarski vijak 0-0,25 x 0,01 mm za određivanje dimenzija ispitivanih čvrstih čestica.

Gustoće analiziranih čestica određene su korištenjem graduirane kivete namijenjene određivanju volumena čestica (slika 13). Gustoća čestica je izračunata iz mase čestica i promjene volumena kapljevine  $\Delta V$  (destilirana voda) u graduiranoj kiveti:

$$\rho_{\zeta} = \frac{m_{\zeta}}{\Delta V}$$



**Slika 13.** Analitička vaga Explorer™ Analytical za određivanje mase ispitivanih čestica (a) i graduirana staklena kiveta za određivanje gustoće (b).

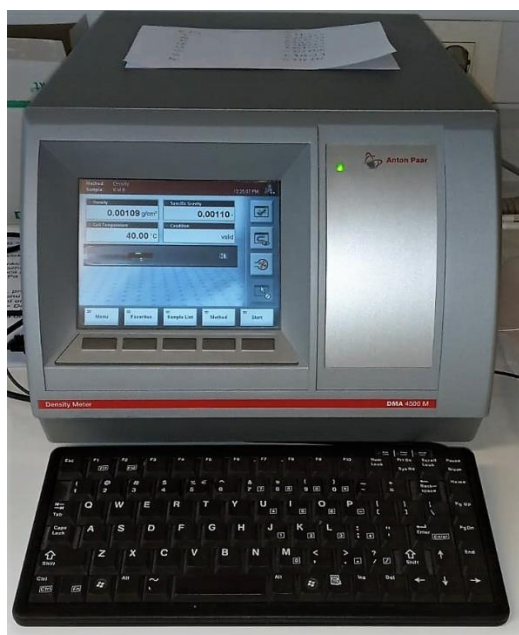
Vrijednosti karakterističnih linearnih dimenzija, kao i određene gustoće čestica, prikazane su tabelarno u poglavlju 3.

Brzine taloženja čestica određivane su u vodenim otopinama glicerola različitim koncentracija čije su fizikalne karakteristike prikazane u tablici 1.

**Tablica 1.** Fizikalne karakteristike vodenih otopina glicerola u kojima se odvijalo taloženje čestica.

Maseni udio glicerola	Gustoća fluida	Viskoznost fluida
$w_G / \%$	$\rho_F / \text{kg m}^{-3}$	$\mu_F / \text{Pa s}$
100	1259,86	1,414
80	1217,70	0,091
70	1194,28	0,035
60	1168,94	0,016
50	1114,54	0,008

Gustoće otopina glicerola određivane su primjenom digitalnog mjerača gustoće tipa Anton Paar DEM 4500 M Chemicals prikazanog na slici 14.



**Slika 14.** Digitalni mjerac gustoće tipa Anton Paar DEM 4500 M Chemicals.

Zbog izrazito velikih vrijednosti dinamičkih viskoznosti vodenih otopina glicerola, pokušaji eksperimentalnog određivanja Hopplerovim viskozimetrom bili su neuspješni, zbog čega se viskoznost fluida određivala korištenjem web programskog paketa prikazanog na slici 15 <sup>17</sup>.

### Calculate density and viscosity of glycerol/water mixtures

Enter temperature [C]:

Enter volume of water [litres]:

Enter volume of glycerol [litres]:

Click this button to do the sum:

Fraction of glycerol by volume is:

Fraction of glycerol by mass is:

Density of mixture is [kg/m<sup>3</sup>]:

Dynamic viscosity of mixture is [Ns/m<sup>2</sup>]:

Kinematic viscosity of mixture is [m<sup>2</sup>/s]:

Contraction of volume of mixture is [%]:

### Calculate density and viscosity of glycerol/water mixtures

Enter temperature [C]:

Enter volume of water [litres]:

Enter volume of glycerol [litres]:

Click this button to do the sum:

Fraction of glycerol by volume is:

Fraction of glycerol by mass is:

Density of mixture is [kg/m<sup>3</sup>]:

Dynamic viscosity of mixture is [Ns/m<sup>2</sup>]:

Kinematic viscosity of mixture is [m<sup>2</sup>/s]:

Contraction of volume of mixture is [%]:

**Slika 15.** Primjer određivanja dinamičke viskoznosti otopine glicerola korištenjem web programskog paketa

[http://www.met.reading.ac.uk/~sws04cdw/viscosity\\_calc.html](http://www.met.reading.ac.uk/~sws04cdw/viscosity_calc.html).

Eksperimentalni rezultati prikazani u ovom radu predstavljaju srednju vrijednost pet izvršenih mjerenja.



## 2.2. Teorijsko određivanje brzine taloženja čestica poznatog promjera primjenom $C_D - Re$ dijagrama

U ovom dijelu rada opisan je postupak određivanja nepoznate brzine taloženja čvrstih čestica na temelju poznatog promjera primjenom  $C_D - Re$  dijagrama.

Polazi se od izraza za brzinu neometanog gravitacijskog taloženja čestica u fluidu koji vrijedi za cijelo područje vrijednosti Reynoldsove značajke (29). Izvod jednadžbi i njihov detaljni opis dani su u poglavlju 1.3., dok su ovdje prikazani konačni izrazi:

$$v_t = \sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot d_c \cdot (\rho_c - \rho_f)}{3 \cdot C_D \cdot \rho_f}}$$

Sređivanjem gornjeg izraza dobije se jednadžba pravca s nagibom -2:

$$\log C_D = -2 \log Re + \log A_v$$

gdje je član  $A_v$ :

$$A_v = \frac{4 \cdot g \cdot d_c^3 \cdot \rho_f \cdot (\rho_c - \rho_f)}{3 \cdot \mu_f^2}$$

Član  $A_v$  se računa pomoću podataka koji se odnose na suspenziju sustava. Nakon izračunatog člana  $A_v$  pristupa se crtanju pravca u dijagramu  $\log C_D - \log Re$  koji prolazi kroz točku  $(Re_1, C_{D,1})$  s koeficijentom smjera -2. Za slučaj kada je  $Re_1 = 1$  ( $\log Re = 0$ ):

$$C_D = A_v$$

Koordinate točke kroz koju prolazi pravac nagiba -2 u koordinatnom sustavu  $\log C_D - \log Re$ , će biti  $(1, A_v)$ .

U sjecištu pravca i krivulje za odgovarajući sfericitet,  $\psi$ , spusti se okomica do apscise i očita Reynoldsova značajka iz koje se potom izračuna brzina taloženja čestica,  $v_t$ .

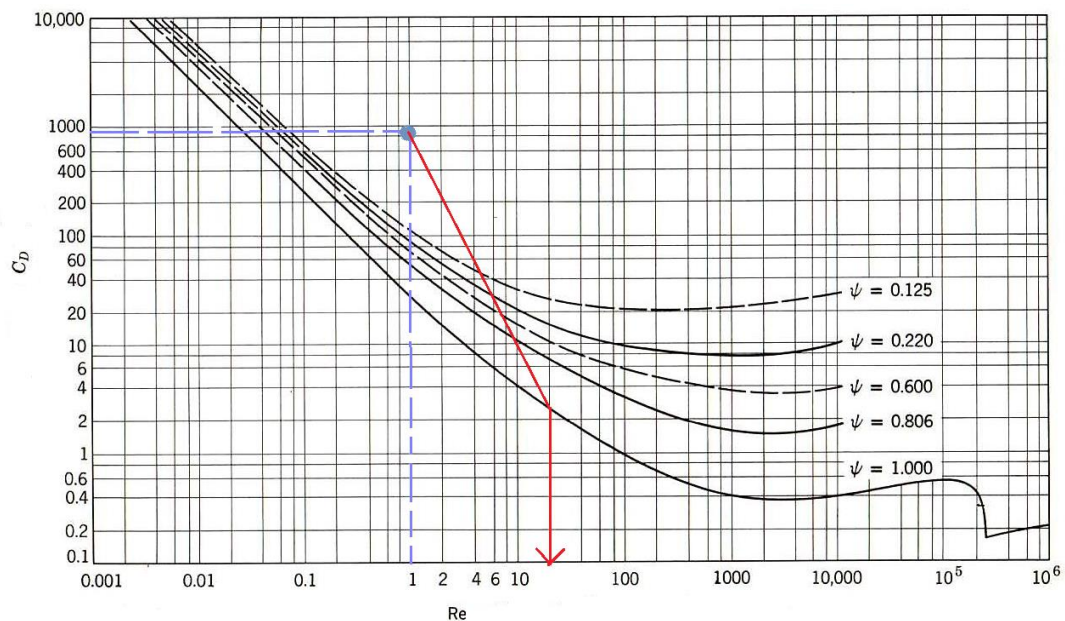
Kao primjer izračuna i primjene  $C_D - Re$  dijagrama uzeto je neometano gravitacijsko taloženje čestica oblika kugle promjera 0,0036 m i gustoće 2709,64 kg m<sup>-3</sup> u 70 mas.% vodenoj otopini glicerola čija je gustoća 1194,28 kg m<sup>-3</sup> i viskoznost 0,0351 Pa s.

Prvo se određuje član  $A_v$  koristeći podatke o suspenziji:

$$A_v = \frac{4 \cdot 9,81 \cdot 0,0036^3 \cdot 1194,28 \cdot (2709,64 - 1194,28)}{3 \cdot 0,0351^2} = 896$$

$$A_v = C_D = 896$$

Potom se crta pravac u dijagramu log  $C_D - \log Re$  koji prolazi kroz točku s koordinatama (1, 896) s koeficijentom smjera -2.



**Slika 16.** Postupak određivanja nepoznate brzine taloženja čvrstih čestica na temelju poznatog promjera primjenom  $C_D - Re$  dijagrama.

Iz određene vrijednosti Reynoldsove značajke izračuna se brzina taloženja čestica,  $v_t$ :

$$v_t = \frac{Re \cdot \mu_f}{d_c \cdot \rho_f} = \frac{20 \cdot 0,0351}{0,0036 \cdot 1194,28} = 0,1633 \text{ m s}^{-1}$$

### 2.3. Određivanje promjera čestica poznate brzine taloženja primjenom $C_D - Re$ dijagrama

U ovom dijelu rada opisan je postupak određivanja nepoznatog promjera čvrstih čestica na temelju poznate brzine taloženja primjenom  $C_D - Re$  dijagrama.

Polazi se od izraza za brzinu neometanog gravitacijskog taloženja čestica u fluidu koji vrijedi za cijelo područje vrijednosti Reynoldsove značajke (29). Izvod jednadžbi i njihov detaljni opisi dani su u poglavlju 1.3., dok su ovdje prikazani konačni izrazi:

$$v_t = \sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot d_c \cdot (\rho_c - \rho_f)}{3 \cdot C_D \cdot \rho_f}}$$

Sređivanjem gornjeg izraza dobije se jednadžba pravca s nagibom -2 (35):

$$\log C_D = \log Re + \log A_d$$

gdje je član  $A_d$ :

$$A_d = \frac{4 \cdot g \cdot \mu_f \cdot (\rho_c - \rho_f)}{3 \cdot v_t^3 \cdot \rho_f^2}$$

Član  $A_d$  se računa pomoću podataka koji se odnose na suspenziju sustava. Nakon izračunatog člana  $A_d$ , crta se pravac u dijagramu  $\log C_D - \log Re$  koji prolazi kroz točku  $(Re_1, C_{D,1})$  s koeficijentom smjera +1. Za slučaj kada je  $Re_1 = 1$ , ( $\log Re = 0$ ) slijedi:

$$C_D = A_d$$

Koordinate točke, kroz koju prolazi pravac nagiba +1 u koordinatnom sustavu  $\log C_D - \log Re$ , će sada biti  $(1, A_d)$ .

U sjecištu pravca i krivulje za odgovarajući sfericitet,  $\psi$ , spusti se okomica do apscise i očita Reynoldsova značajka iz koje se potom izračuna promjer čestice,  $d_c$ .

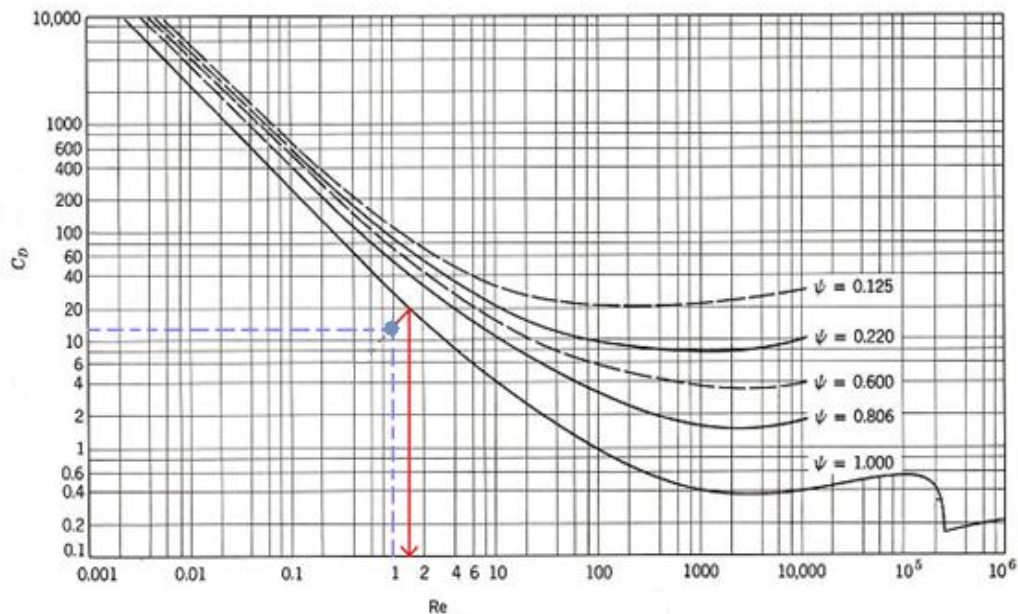
Kao primjer izračuna i primjene  $C_D - Re$  dijagrama uzeto je neometano gravitacijsko taloženje čestica oblika kugle brzine taloženja  $0,012 \text{ m s}^{-1}$  i gustoće  $1264,81 \text{ kg m}^{-3}$  u 70 mas.% vodenoj otopini glicerola čija je gustoća  $1194,28 \text{ kg m}^{-3}$  i viskoznost  $0,0351 \text{ Pa s}$ .

Prvo se određuje član  $A_d$  koristeći podatke o suspenziji.

$$A_v = \frac{4 \cdot 9,81 \cdot 0,0351 \cdot (1264,81 - 1194,28)}{3 \cdot 0,012^3 \cdot 1194,28^2} = 13$$

$$A_v = C_D = 13$$

Potom se crta pravac u dijagramu  $\log C_D - \log Re$  koji prolazi kroz točku (1, 13) s koeficijentom smjera +1.



**Slika 17.** Postupak određivanja nepoznatog promjera čvrstih čestica na temelju poznate brzine taloženja primjenom  $C_D - Re$  dijagrama.

Iz određene vrijednosti Reynoldsove značajke izračuna se promjer čestice,  $d_{\zeta}$ , iz izraza:

$$d_{\zeta} = \frac{Re \cdot \mu_f}{v_t \cdot \rho_f} = \frac{1,5 \cdot 0,0351}{0,012 \cdot 1194,28} = 0,0037 \text{ m}$$

## 2.4. Određivanje ekvivalentnog promjera nesferične čestice i njenog faktora oblika (sfericiteta)

U ovom dijelu rada opisan je postupak određivanja ekvivalentnog promjera i faktora oblika čvrste čestice nepravilnog oblika, tzv. nesferične čestice. Kao primjer izračuna uzeta je nesferična čestica oblika valjka promjera 0,0047 m i visine 0,0094 m.

**Ekvivalentni promjer** predstavlja promjer zamišljene kugle koja ima isti volumen kao i tijelo nepravilnog oblika (u ovom slučaju valjak):

$$V_{kugle} = V_{valjka}$$

Izraz za volumen kugle glasi:

$$V_{kugle} = \frac{d^3 \cdot \pi}{6}$$

Uvrštavanjem izraza za volumen kugle u početnu jednadžbu dobije se:

$$\frac{d^3 \cdot \pi}{6} = V_{valjka}$$

iz čega proizlazi izraz za određivanje ekvivalentnog promjera nesferične čestice oblika valjka:

$$d_{ekv} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot V_{valjka}}{\pi}}$$

Kako bi bilo moguće odrediti ekvivalentni promjer, prethodno je potrebno izračunati volumen valjka prema izrazu:

$$V_{valjka} = \frac{d_v^2 \cdot \pi \cdot h_v}{4}$$

$$V_{valjka} = \frac{(0,0047 \text{ m})^2 \cdot \pi \cdot 0,0094 \text{ m}}{4} = 1,63 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$$

Iz čega slijedi:

$$d_{ekv} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot (1,63 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3)}{\pi}} = 6,77 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

**Faktor oblika, tj. sfericitet** definira se kao omjer površine zamišljene kugle koja ima isti volumen kao ispitivano tijelo i površine ispitivanog tijela (u ovom slučaju valjka):

$$\psi = \frac{S_{kugle}}{S_{valjka}}$$

Izraz za oplošje, tj. površinu kugle glasi:

$$S_{kugle} = d_{ekv}^2 \cdot \pi$$

Uvrštavanjem određenog ekvivalentnog promjera nesferične čestice u izraz za površinu kugle dobije se:

$$S_{kugle} = (6,77 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \cdot \pi = 1,44 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Dok je izraz za površinu valjka:

$$S_{valjka} = \frac{2 \cdot d_v^2 \cdot \pi}{4} + d_v \cdot \pi \cdot h_v$$

$$S_{valjka} = \frac{2 \cdot (0,0047 \text{ m})^2 \cdot \pi}{4} + 0,0047 \text{ m} \cdot \pi \cdot 0,0094 \text{ m}$$

$$S_{valjka} = 1,73 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Uvrštavanjem izračunatih površina u polaznu jednadžbu dobije se:

$$\psi = \frac{1,44 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{1,73 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 0,832$$

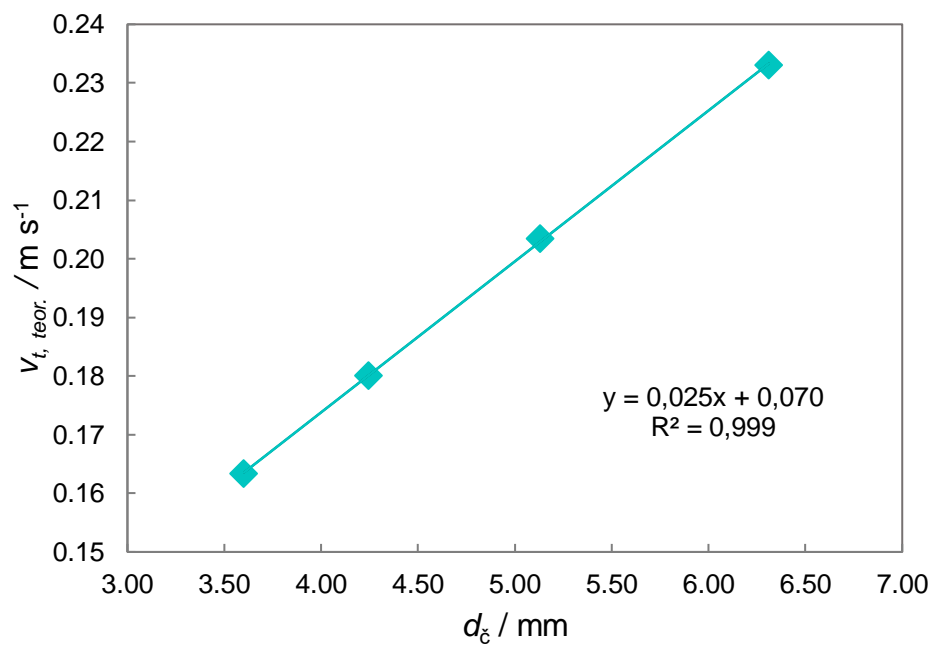
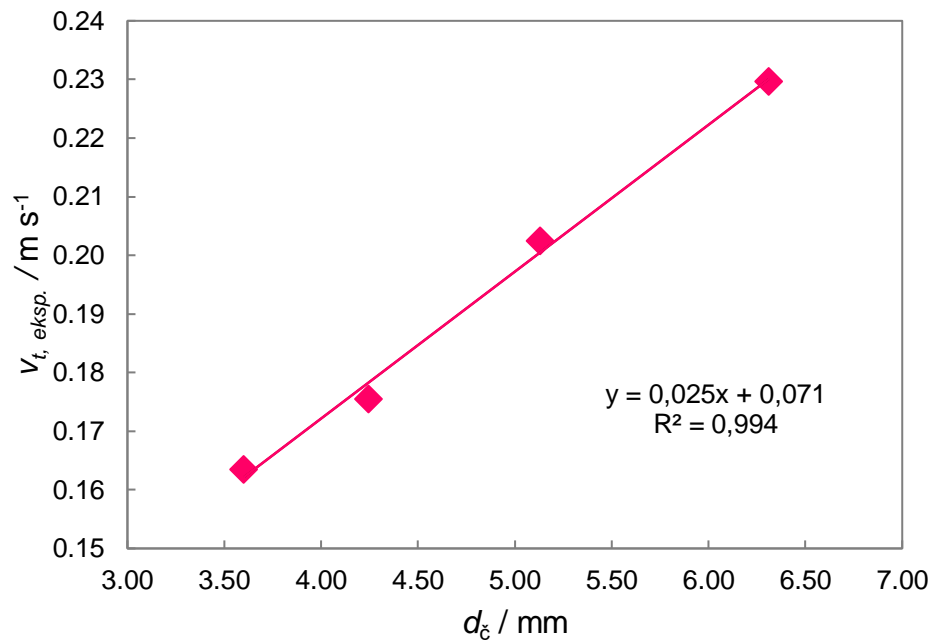
### **3. REZULTATI**

### 3.1. Utjecaj promjera sferičnih čestica na brzinu taloženja

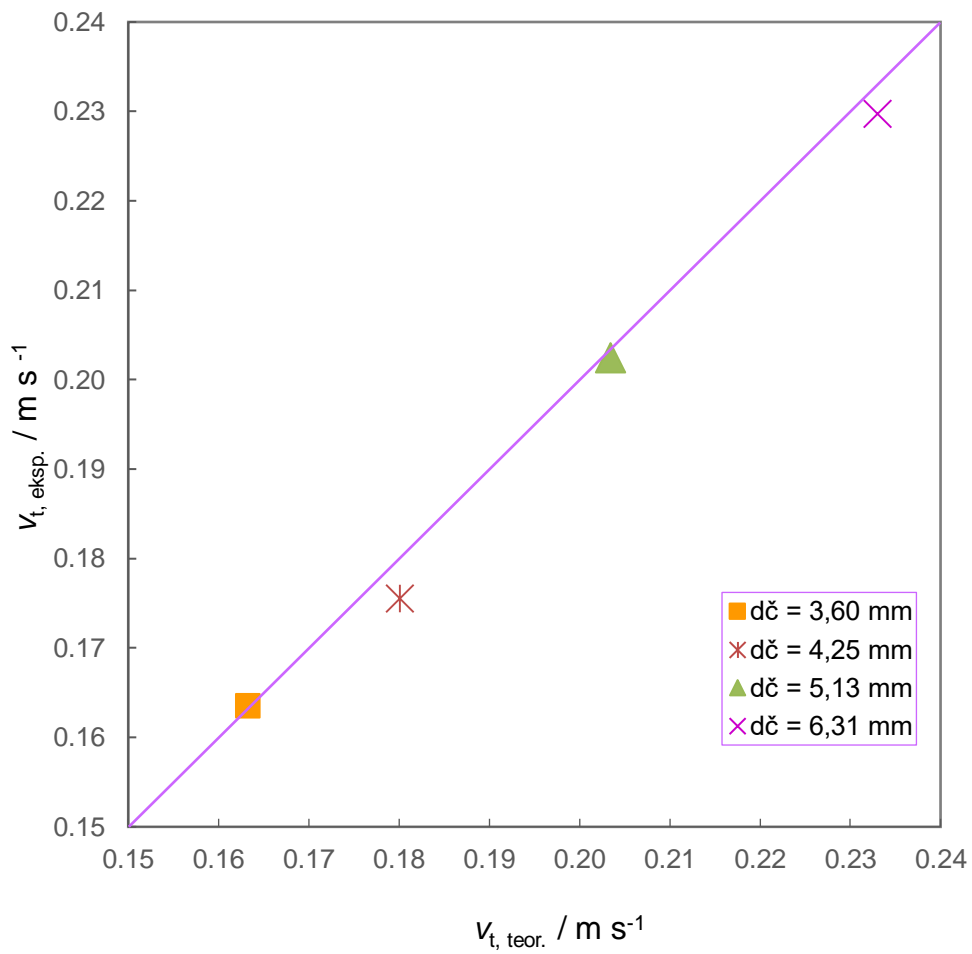
U prvom dijelu rada prikazana je ovisnost brzine taloženja sferičnih čestica o njihovoj veličini kada se talože u 70 mas. % vodenoj otopini glicerola. Brzina taloženja čestica određena je eksperimentalno i primjenom  $C_D - Re$  dijagrama, što će u daljnjem dijelu teksta biti naznačeno kao teorijski način određivanja. Postupci određivanja detaljnije su opisani u poglavlju 2.

Na slici 18 prikazan je utjecaj promjera čestica sferičnog oblika na brzinu taloženja u vodenoj otopini glicerola određen eksperimentalno i teorijski, dok je usporedba dobivenih vrijednosti dana na slici 19.





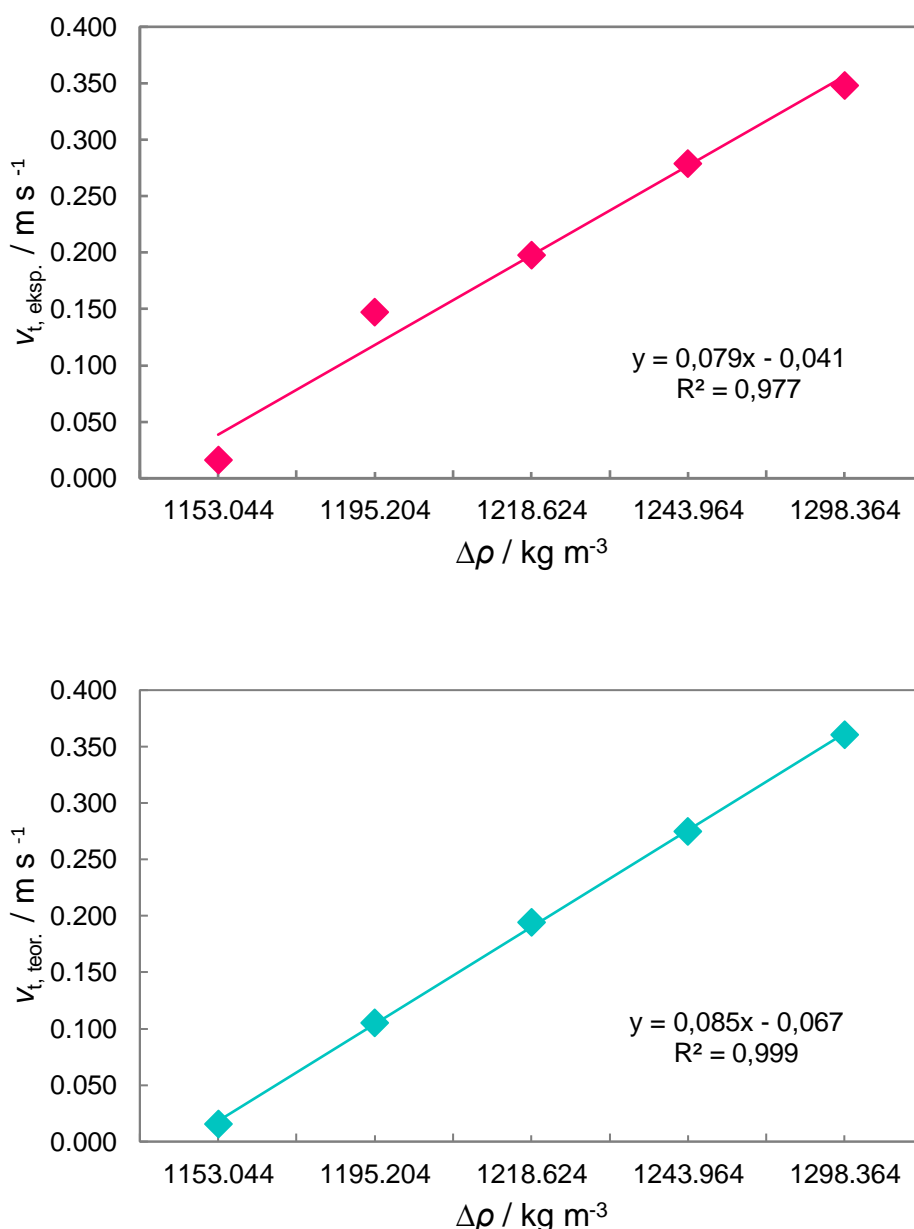
**Slika 18.** Utjecaj promjera sferičnih čestica na brzinu taloženja određen eksperimentalno i teorijski ( $\rho_{\xi} = 2709,64 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $\Psi = 1$ ;  $\rho_f = 1194,28 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $\mu_f = 0,035 \text{ Pa s}$ ;  $w_G = 0,7$ ).



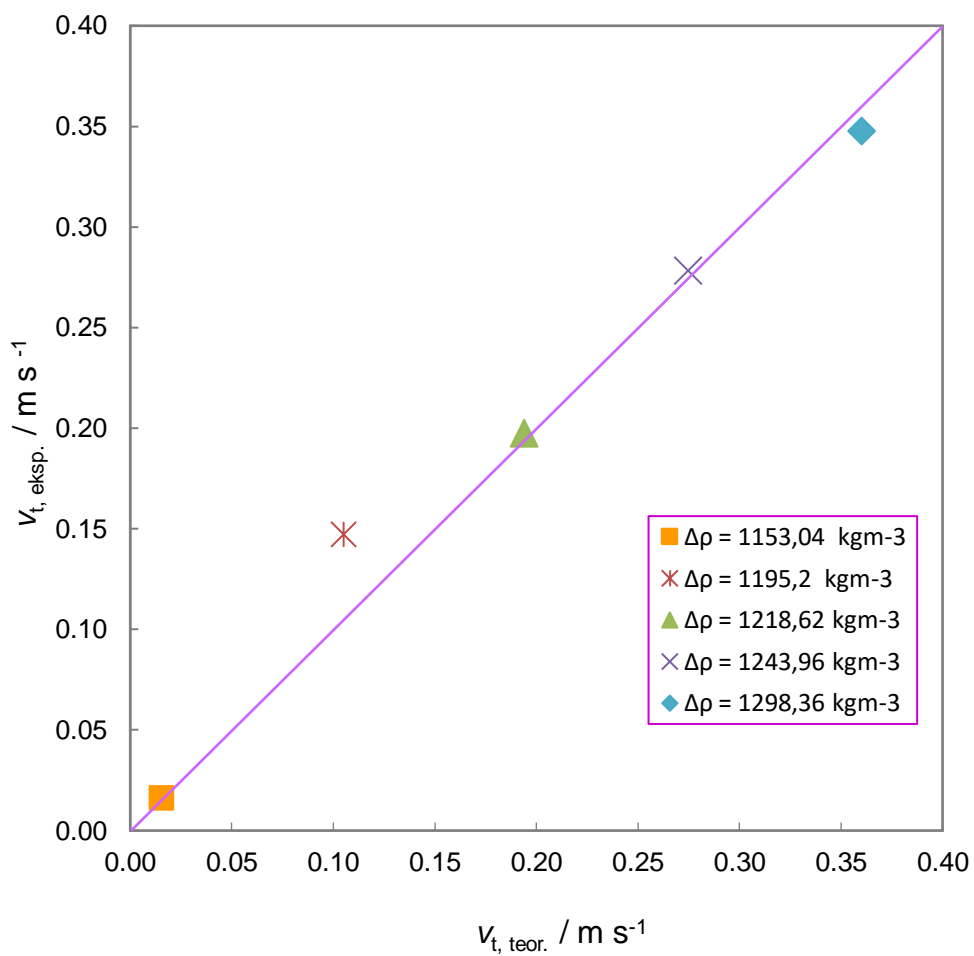
**Slika 19.** Usporedba eksperimentalno i teorijski dobivenih vrijednosti brzina taloženja sferičnih čestica različitih veličina ( $\rho_c = 2709,64 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $\Psi = 1$ ;  $\rho_f = 1194,28 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $\mu_f = 0,035 \text{ Pa s}$ ;  $w_G = 0,7$ ).

### 3.2. Utjecaj razlike gustoća na brzinu taloženja sferičnih čestica

Utjecaj razlike gustoća sferičnih čestica koje se talože i fluida na brzinu taloženja prikazan je na slici 20. Brzine taloženja određene su eksperimentalno i teorijski postupcima detaljno opisanim u poglavlju 2. Na slici 21 prikazana je usporedba eksperimentalnih i teorijski dobivenih vrijednosti brzina taloženja pri različitim vrijednostima razlike gustoća.



**Slika 20.** Utjecaj razlike gustoća na brzinu taloženja sferičnih čestica određen eksperimentalno i teorijski ( $d_c = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ;  $\rho_c = 2412,90 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $\Psi = 1$ ;  $w_G = 0,5-1,0$ ).



**Slika 21.** Usporedba eksperimentalno i teorijski dobivenih vrijednosti brzina taloženja sferičnih čestica u otopinama glicerola različitih gustoća ( $d_{\text{č}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ;  $\rho_{\text{č}} = 2412,90 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $\Psi = 1$ ;  $w_G = 0,5-1,0$ ).

### 3.3. Određivanje promjera sferičnih čestica poznate brzine taloženja

Nepoznati promjer određivao se za dvije različite veličine sferičnih čestica poznatih brzina taloženja uz primjenu  $C_D - Re$  dijagrama, a sami postupak određivanja detaljno je opisan u poglavlju 2.3. Radi usporedbe nepoznati promjer sferične čestice se, osim uz primjenu  $C_D - Re$  dijagrama, odredio i pomoću mikrometarskog vijka. Dobiveni podaci prikazani su u tablicama 2-4.

Na slikama 22 i 23 prikazan je način određivanje promjera čestice sferičnog oblika poznate brzine taloženja u vodenoj otopini glicerola primjenom  $C_D - Re$  dijagrama.

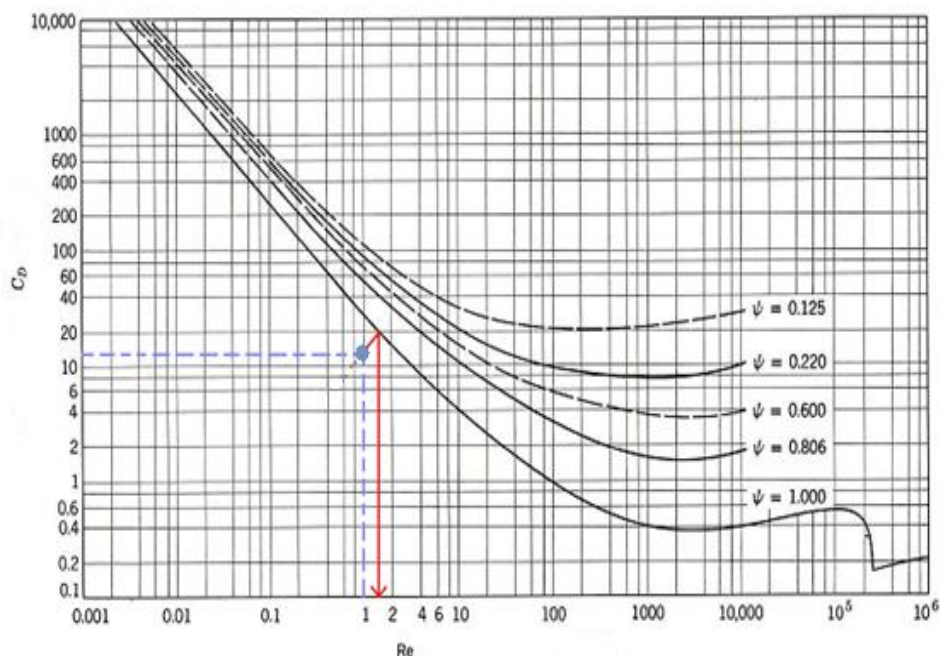
#### 3.3.1. Eksperimentalno određene vrijednosti brzine taloženja sferičnih čestica nepoznatog promjera

**Tablica 2.** Eksperimentalno određene vrijednosti brzina taloženja čestica sferičnog oblika nepoznatog promjera u vodenoj otopini glicerola ( $w_G = 0,7$ ).

Broj mjerenja, $n$	Oblik čestice, $\psi$	Put taloženja, $h$	Vrijeme taloženja, $t$	Brzina taloženja, $V_t$ , eksp.	Srednja brzina taloženja, $V_t$ , eksp.
/	/	m	s	$m\ s^{-1}$	$m\ s^{-1}$
1.	1 (kugla)	1	83,53	0,0120	0,0121
2.			82,78	0,0121	
3.			82,85	0,0121	
4.			83,34	0,0120	
5.			82,37	0,0121	

Broj mjerenja, $n$	Oblik čestice, $\psi$	Put taloženja, $h$	Vrijeme taloženja, $t$	Brzina taloženja, $V_t$ , eksp.	Srednja brzina taloženja, $V_t$ , eksp.
/	/	m	s	$m\ s^{-1}$	$m\ s^{-1}$
1.	1 (kugla)	1	47,31	0,0211	0,0211
2.			47,62	0,0210	
3.			47,28	0,0212	
4.			47,25	0,0212	
5.			47,28	0,0212	

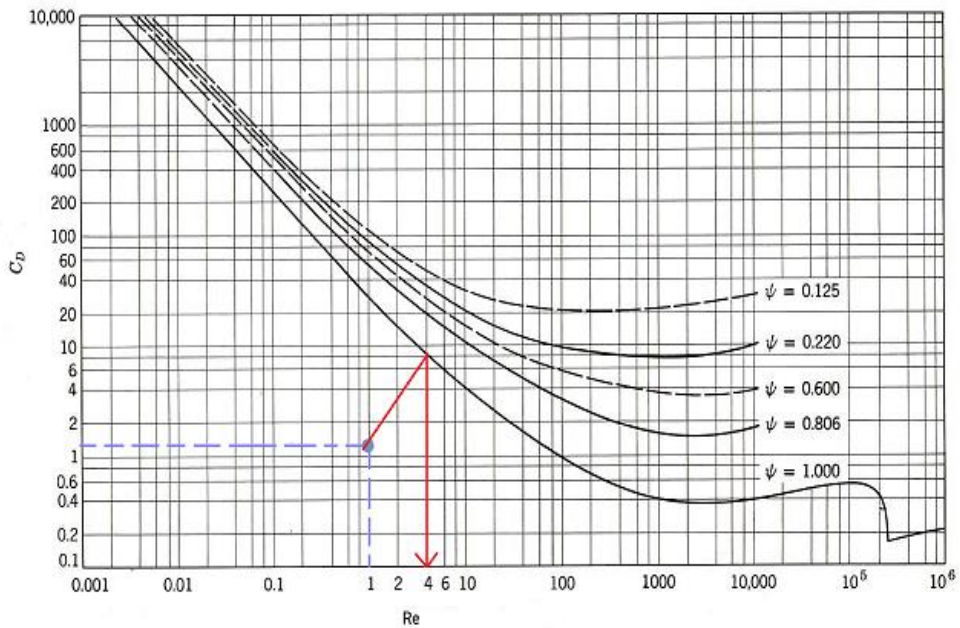
### 3.3.2. Određivanje promjera sferičnih čestica poznate brzine taloženja primjenom $C_D - Re$ dijagrama



**Slika 22.** Određivanje promjera čestice sferičnog oblika poznate brzine taloženja primjenom  $C_D - Re$  dijagrama ( $\rho_{\check{c}} = 1264,81 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $v_t = 0,012 \text{ m s}^{-1}$ ;  $\Psi = 1$ ;  $\rho_f = 1194,28 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $\mu_f = 0,035 \text{ Pa s}$ ;  $w_G = 0,7$ ).

**Tablica 3.** Usporedba promjera sferične čestice izmjenog i određenog primjenom  $C_D - Re$  dijagrama.

Poznate veličine		Izmjereni promjer čestice A	Promjer čestice A određen primjenom $C_D - Re$ dijagrama
		$d_{\check{c}, \text{eksp.}} / \text{m}$	$d_{\check{c}, \text{teor.}} / \text{m}$
$\Psi$	1	$3,39 \cdot 10^{-3}$	$3,66 \cdot 10^{-3}$
$v_t$	$0,012 \text{ m s}^{-1}$		
$\rho_{\check{c}}$	$1264,81 \text{ kg m}^{-3}$		
$\rho_f$	$1194,28 \text{ kg m}^{-3}$		
$\mu_f$	$0,035 \text{ Pa s}$		
$Re$	1,50		



**Slika 23.** Određivanje promjera čestice sferičnog oblika poznate brzine taloženja primjenom  $C_D - Re$  dijagrama ( $\rho_{\check{c}} = 1232,75 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $v_t = 0,021 \text{ m s}^{-1}$ ;  $\Psi = 1$ ;  $\rho_f = 1194,28 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $\mu_f = 0,035 \text{ Pa s}$ ;  $w_G = 0,7$ ).

**Tablica 4.** Usporedba promjera sferične čestice izmjerenog i određenog primjenom  $C_D - Re$  dijagrama.

Poznate veličine		Izmjereni promjer čestice B	Promjer čestice B određen primjenom $C_D - Re$ dijagrama
		$d_{\check{c}, \text{eksp.}} / \text{m}$	$d_{\check{c}, \text{teor.}} / \text{m}$
$\Psi$	1	$4,96 \cdot 10^{-3}$	$5,60 \cdot 10^{-3}$
$v_t$	$0,021 \text{ m s}^{-1}$		
$\rho_{\check{c}}$	$1232,75 \text{ kg m}^{-3}$		
$\rho_f$	$1194,28 \text{ kg m}^{-3}$		
$\mu_f$	$0,035 \text{ Pa s}$		
$Re$	4		

### 3.4. Određivanje brzine taloženja nesferičnih čestica

U tablici 5 prikazani su rezultati eksperimentalnog određivanja brzine taloženja nesferičnih čestica poznatih promjera. Brzina taloženja nesferičnih čestica određivana je i primjenom  $C_D - Re$  dijagrama. Sam postupak određivanja detaljnije je opisan u poglavlju 2. Teorijsko određivanje nepoznate brzine taloženja uz poznate veličine nesferičnih čestica prikazano je na slikama 24-26.

#### 3.4.1. Eksperimentalno određene vrijednosti brzine taloženja nesferičnih čestica

**Tablica 5.** Eksperimentalno određene vrijednosti brzina taloženja za nesferične čestice različitih oblika ( $w_G = 0,7$ ).

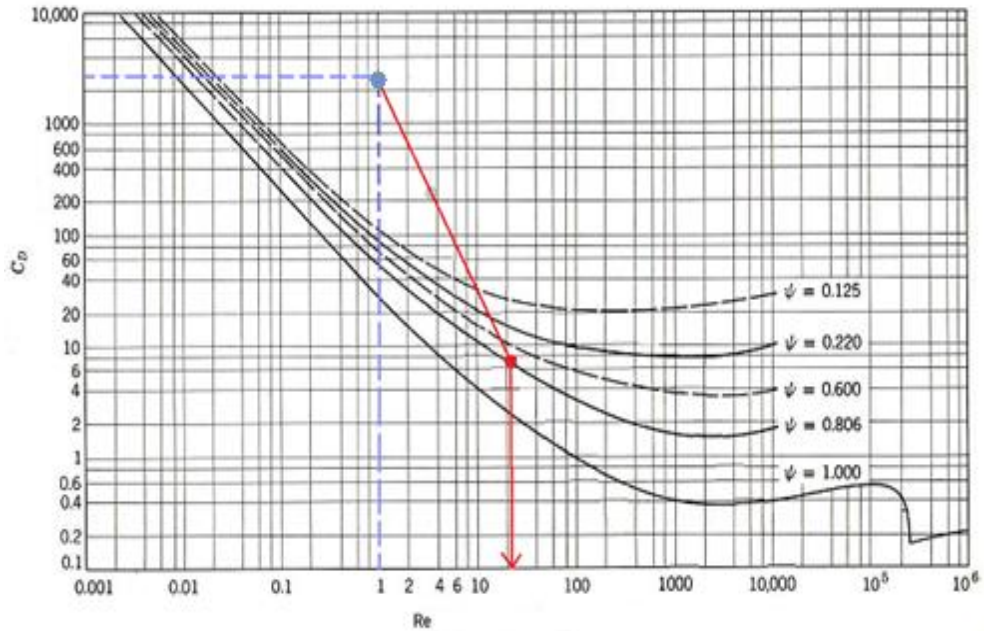
Broj mjerenja, $n$	Oblik čestice, $\psi$	Dužina brida, $a$	Put taloženja, $h$	Vrijeme taloženja, $t$	Brzina taloženja, $V_t$ , eksp.	Srednja brzina taloženja, $V_t$ , eksp.
/	/	m	m	s	$m\ s^{-1}$	$m\ s^{-1}$
1.	0,806 (kocka)	$3,40 \cdot 10^{-3}$	1	6,37	0,157	0,153
2.				6,65	0,150	
3.				6,53	0,153	
4.				6,47	0,155	
5.				6,75	0,148	

Broj mjerenja, $n$	Oblik čestice, $\psi$	Dužina brida, $a$	Put taloženja, $h$	Vrijeme taloženja, $t$	Brzina taloženja, $V_t$ , eksp.	Srednja brzina taloženja, $V_t$ , eksp.
/	/	m	m	s	$m\ s^{-1}$	$m\ s^{-1}$
1.	0,806 (kocka)	$10,2 \cdot 10^{-3}$	1	9,47	0,106	0,107
2.				9,37	0,107	
3.				9,43	0,106	
4.				9,22	0,108	
5.				9,22	0,108	

Broj mjerenja, $n$	Oblik čestice, $\psi$	Dužina brida, $a$	Put taloženja, $h$	Vrijeme taloženja, $t$	Brzina taloženja, $V_t$ , eksp.	Srednja brzina taloženja, $V_t$ , eksp.
/	/	m	m	s	$m\ s^{-1}$	$m\ s^{-1}$
1.	0,874 (valjak)	$10,0 \cdot 10^{-3}$	1	9,91	0,101	0,103
2.				9,53	0,105	
3.				9,66	0,104	
4.				9,75	0,103	
5.				9,63	0,104	



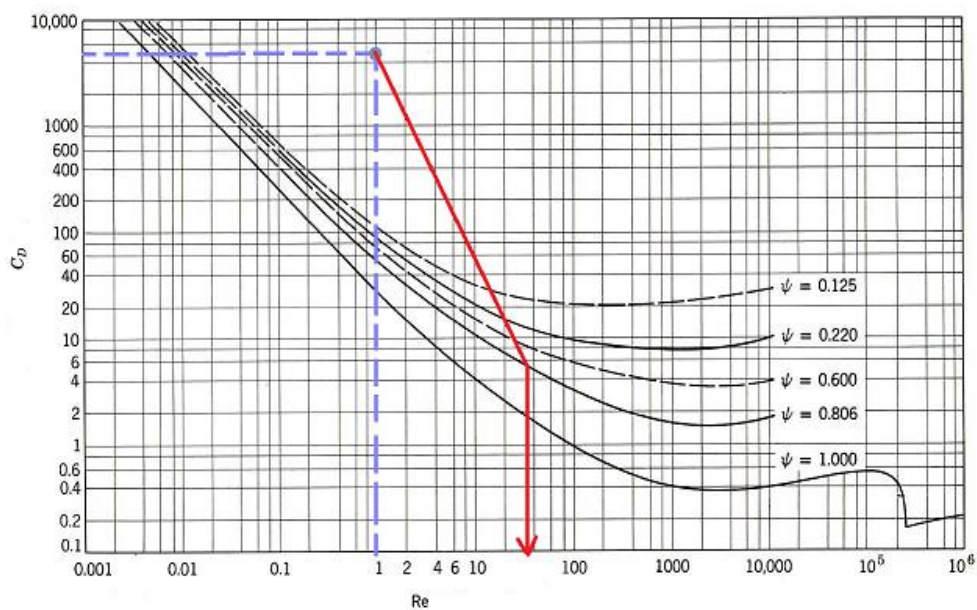
### 3.4.2. Određivanje brzine taloženja nesferičnih čestica poznatog promjera primjenom $C_D - Re$ dijagrama



**Slika 24.** Određivanje brzine taloženja čestice oblika kocke primjenom  $C_D - Re$  dijagrama ( $d_c = 3,4 \cdot 10^{-3}$  m ;  $\psi = 0,806$  ;  $\rho_c = 2545,90$  kg m<sup>-3</sup>;  $\rho_f = 1194,28$  kg m<sup>-3</sup>;  $\mu_f = 0,035$  Pa s;  $w_G = 0,7$ ).

**Tablica 6.** Usporedba teorijski i eksperimentalno određene brzine taloženja čestice oblika kocke.

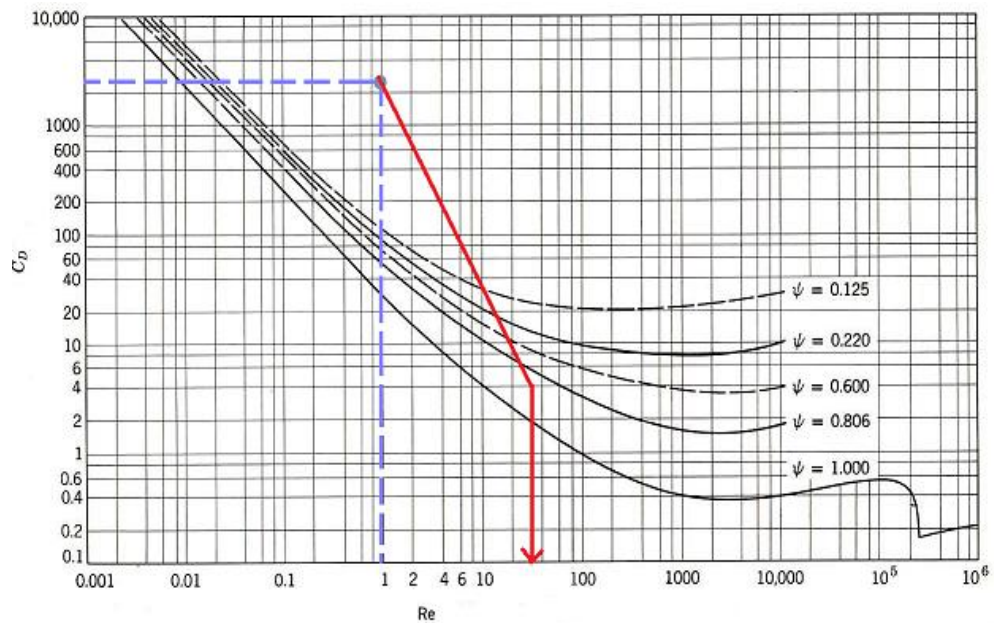
Poznate veličine		Eksperimentalno određena brzina taloženja	Teorijski određena brzina taloženja
		$V_{t, \text{eksp.}} / \text{m s}^{-1}$	$V_{t, \text{teor.}} / \text{m s}^{-1}$
$\psi$	0,806	0,1526	0,1569
$a$	0,0034 m		
$d_{\text{ekv}}$	0,00042 m		
$\rho_c$	2545,90 kg m <sup>-3</sup>		
$\rho_f$	1194,28 kg m <sup>-3</sup>		
$\mu_f$	0,035 Pa s		
$Re$	22,5		



**Slika 25.** Određivanje brzine taloženja čestice oblika kocke primjenom  $C_D - Re$  dijagrama ( $d_{\check{c}} = 10,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ;  $\Psi = 0,806$ ;  $\rho_{\check{c}} = 1388,67 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $\rho_f = 1194,28 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $\mu_f = 0,035 \text{ Pa s}$ ;  $w_G = 0,7$ ).

**Tablica 7.** Usporedba teorijski i eksperimentalno određene brzine taloženja čestice oblika kocke.

Poznate veličine		Eksperimentalno određena brzina taloženja	Teorijski određena brzina taloženja
		$v_{t, \text{ eksp.}} / \text{ m s}^{-1}$	$v_{t, \text{ teor.}} / \text{ m s}^{-1}$
$\psi$	0,806	0,1071	0,1083
$a$	0,0102 m		
$d_{\text{ekv}}$	0,0126 m		
$\rho_{\check{c}}$	$1388,67 \text{ kg m}^{-3}$		
$\rho_f$	$1194,28 \text{ kg m}^{-3}$		
$\mu_f$	0,035 Pa s		
$Re$	37,5		



**Slika 26.** Određivanje brzine taloženja čestice oblika valjka primjenom  $C_D - Re$  dijagrama ( $d_{\check{c}} = 10,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ;  $\Psi = 0,874$ ;  $\rho_{\check{c}} = 1328,80 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $\rho_f = 1194,28 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $\mu_f = 0,035 \text{ Pa s}$ ;  $w_G = 0,7$ ).

**Tablica 8.** Usporedba teorijski i eksperimentalno određene brzine taloženja čestice oblika valjka.

Poznate veličine		Eksperimentalno određena brzina taloženja	Teorijski određena brzina taloženja
		$V_{t, \text{eksp.}} / \text{m s}^{-1}$	$V_{t, \text{teor.}} / \text{m s}^{-1}$
$\Psi$	0,874	0,1032	0,0915
$h_{\check{c}}$	0,0103 m		
$d_{\check{c}}$	0,0100 m		
$d_{\text{ekv}}$	0,0116 m		
$\rho_{\check{c}}$	$1328,80 \text{ kg m}^{-3}$		
$\rho_f$	$1194,28 \text{ kg m}^{-3}$		
$\mu_f$	0,035 Pa s		
$Re$	36		

### 3.5. Određivanje ekvivalentnog promjera nesferične čestice poznate brzine taloženja

Nepoznati ekvivalentni promjer određivan je za jednu vrstu nesferičnih čestica, oblika kocke, poznate brzine taloženja uz primjenu  $C_D - Re$  dijagrama, a sami postupak određivanja detaljnije je opisan u poglavlju 2.4. Ekvivalentni promjer iste čestice, osim uz primjenu  $C_D - Re$  dijagrama, odredio se i mjerenjem njenih dimenzija mikrometarskim vijkom kako bi se mogli usporediti teorijski i eksperimentalno dobiveni podaci.

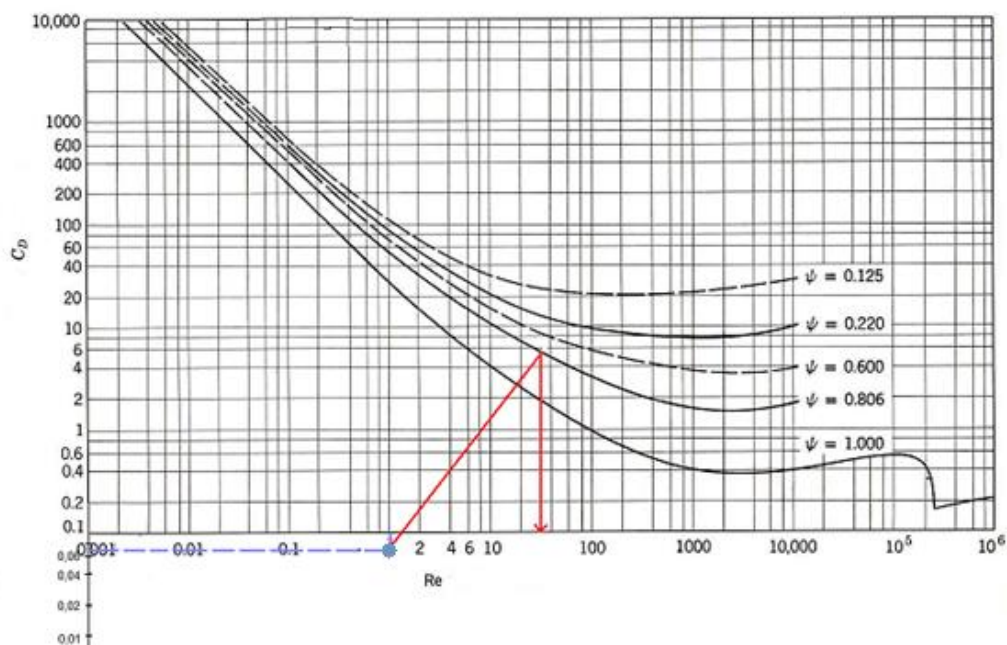
U tablici 9 prikazana je eksperimentalno određena brzina taloženja ispitivane čestice, dok je na slici 27 prikazan način određivanja ekvivalentnog promjera čestice nesferičnog oblika poznate brzine taloženja u vodenoj otopini glicerola primjenom  $C_D - Re$  dijagrama.

#### 3.5.1. Eksperimentalno određene vrijednosti brzina taloženja nesferičnih čestica nepoznatog ekvivalentnog promjera

**Tablica 9.** Eksperimentalno određene vrijednosti brzine taloženja za česticu oblika kocke nepoznatog ekvivalentnog promjera ( $w_G = 0,7$ ).

Broj mjerjenja, $n$	Oblik čestice, $\psi$	Put taloženja, $h$	Vrijeme taloženja, $t$	Brzina taloženja, $V_t$ , eksp.	Srednja brzina taloženja, $V_t$ , eksp.
/	/	m	s	$m\ s^{-1}$	$m\ s^{-1}$
1.	0,803 (kocka)	1	5,47	0,183	0,183
2.			5,56	0,180	
3.			5,50	0,182	
4.			5,47	0,183	
5.			5,31	0,188	

### 3.5.2. Određivanje ekvivalentnog promjera nesferične čestice poznate brzine taloženja primjenom $C_D - Re$ dijagrama



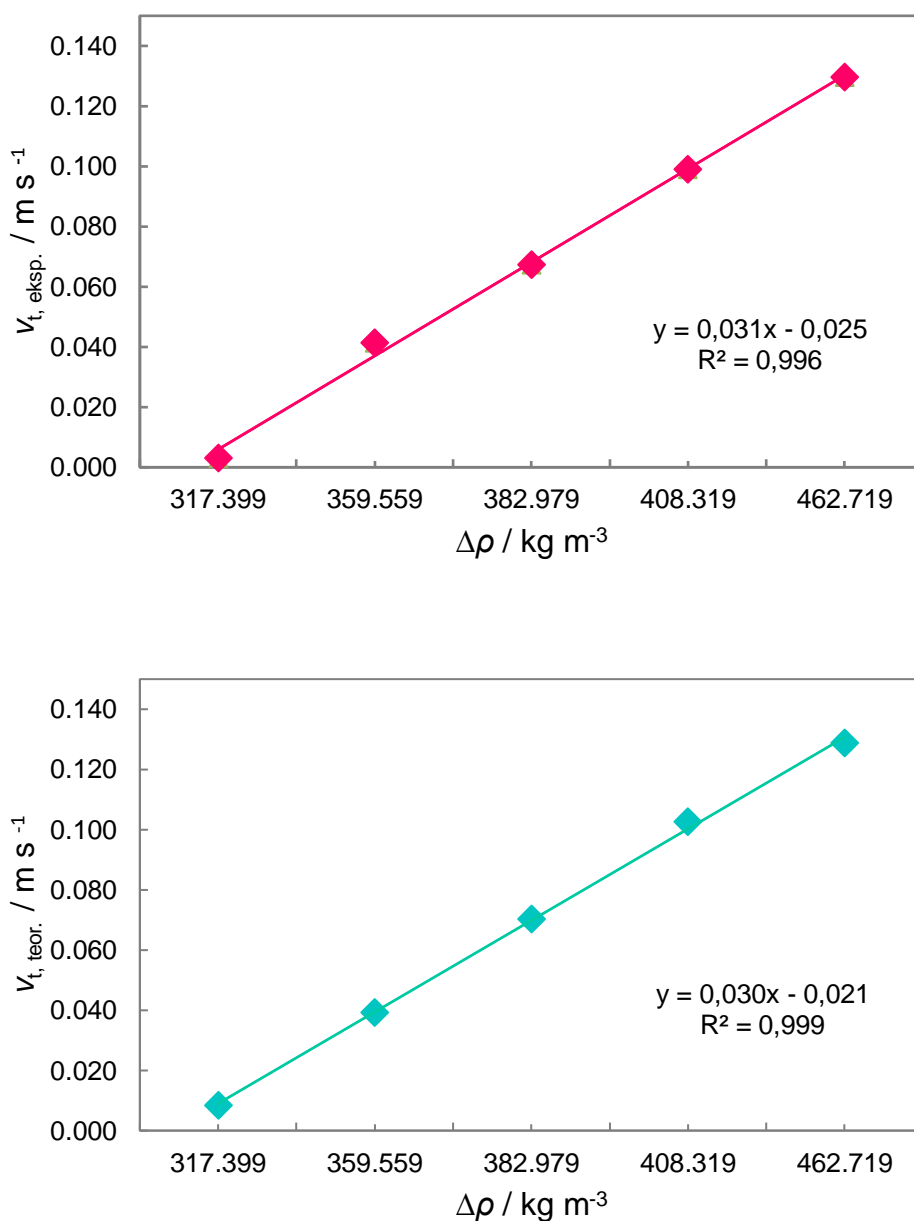
**Slika 27.** Određivanje ekvivalentnog promjera čestice oblika kocke poznate brzine taloženja primjenom  $C_D - Re$  dijagrama ( $\psi = 0,803$ ;  $v_t = 0,183 \text{ m s}^{-1}$ ;  $\rho_{\check{c}} = 2545,90 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $\rho_f = 1194,28 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $\mu_f = 0,035 \text{ Pa s}$ ;  $w_G = 0,7$ ).

**Tablica 10.** Usporedba teorijski i eksperimentalno određenog ekvivalentnog promjera čestice oblika kocke.

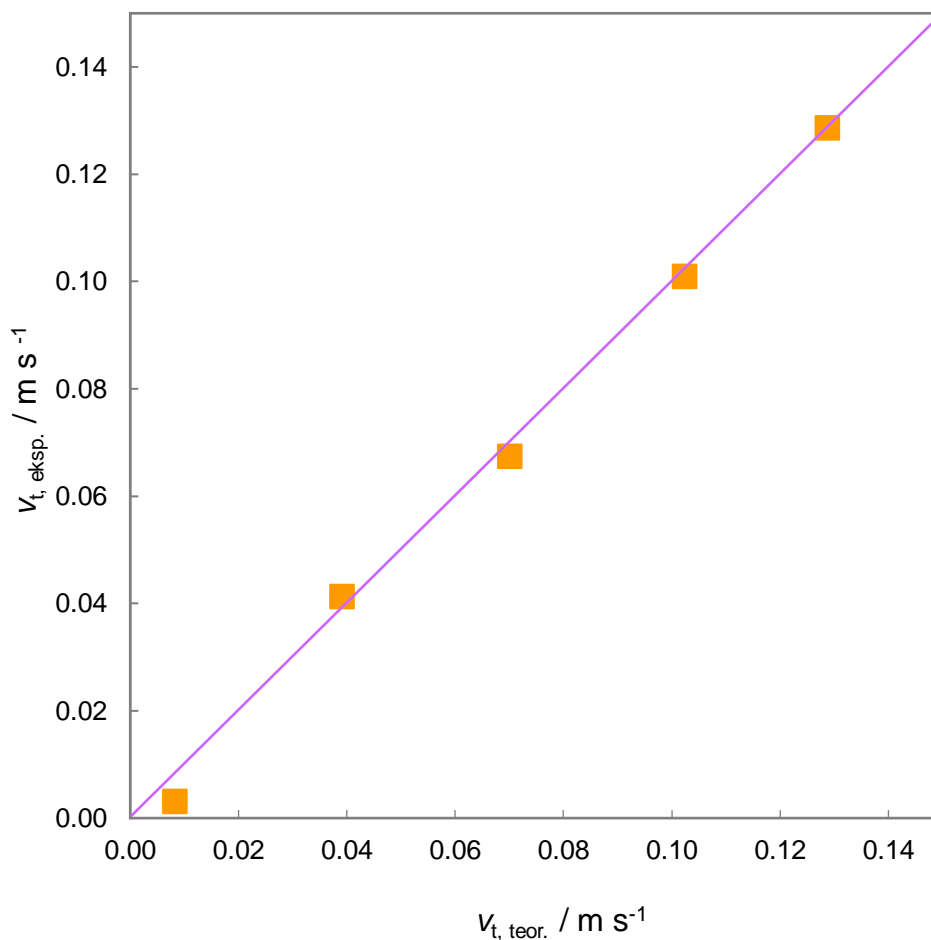
Poznate veličine		Izmjereni promjer čestice	Promjer čestice određen primjenom $C_D - Re$ dijagrama
		$d_{\text{ekv, eksp.}} / \text{m}$	$d_{\text{ekv, teor.}} / \text{m}$
$\psi$	0,803	$3,55 \cdot 10^{-3}$	$5,30 \cdot 10^{-3}$
$v_t$	$0,18308 \text{ m s}^{-1}$		
$\rho_{\check{c}}$	$2545,90 \text{ kg m}^{-3}$		
$\rho_f$	$1194,28 \text{ kg m}^{-3}$		
$\mu_f$	$0,035132 \text{ Pa s}$		
$Re$	33		

### 3.6. Utjecaj razlike gustoća na brzinu taloženja nesferičnih čestica

Utjecaj razlike gustoća nesferičnih čestica koje se talože u fluida na brzinu taloženja prikazan je na slikama 28 i 30. Brzine taloženja određene su eksperimentalno i teorijski postupcima detaljno opisanim u poglavlju 2. Na slikama 29 i 31 prikazana je usporedba eksperimentalnih i teorijski dobivenih vrijednosti brzina taloženja pri različitim vrijednostima razlike gustoća.



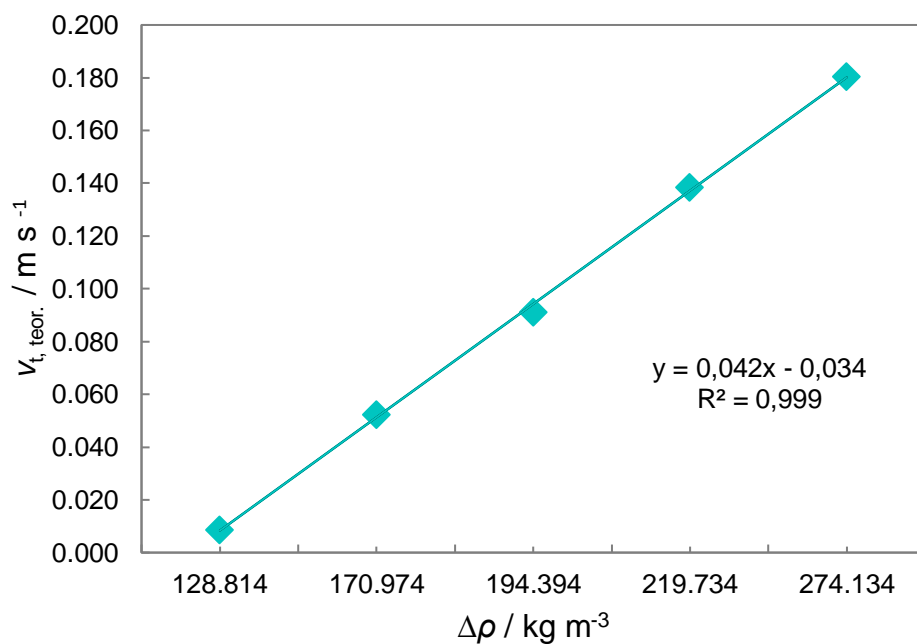
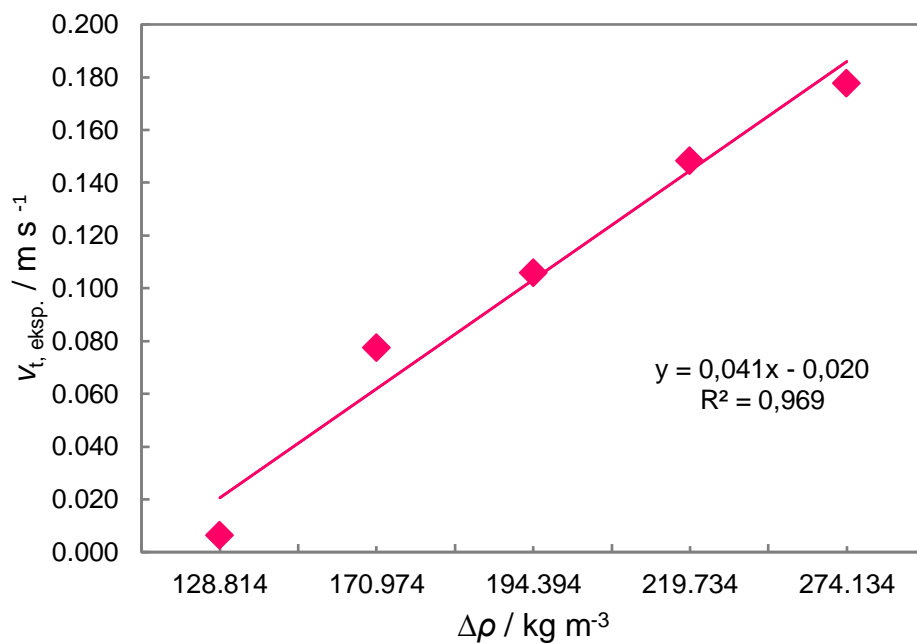
**Slika 28.** Utjecaj razlike gustoća na brzinu taloženja čestica oblika valjka određen eksperimentalno i teorijski ( $d_{\text{ekv}} = 6,70 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ;  $\Psi = 0,832$ ;  $\rho_s = 1577,26 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $w_G = 0,5-1,0$ ).



**Slika 29.** Usporedba eksperimentalno i teorijski dobivenih vrijednosti brzina taloženja čestica oblika valjka u otopinama glicerola različitih gustoća ( $d_{\text{ekv}} = 6,70 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ;  $\Psi = 0,832$ ;  $\rho_{\text{č}} = 1577,26 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $w_G = 0,5-1,0$ ).

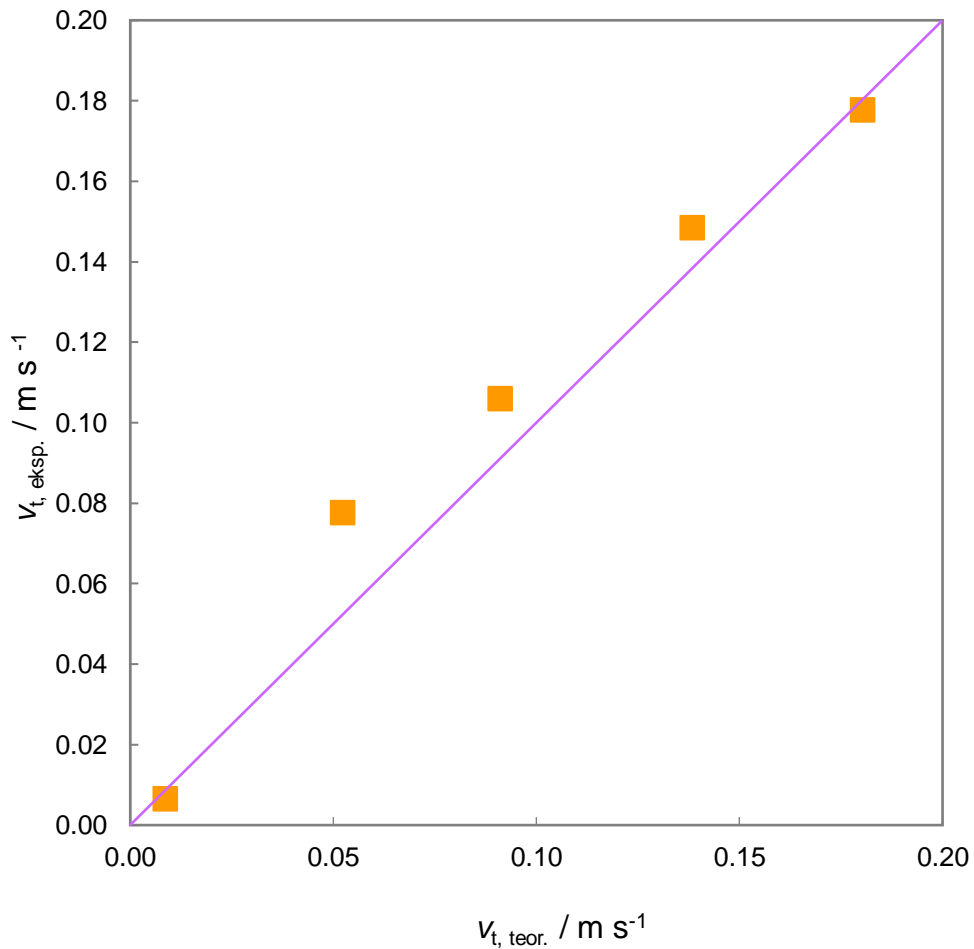
**Tablica 10.** Usporedba teorijski i eksperimentalno dobivenih vrijednosti brzina taloženja čestica oblika valjka.

Razlika gustoća	Eksperimentalno određena brzina taloženja	Teorijski određena brzina taloženja
$\Delta\rho / \text{kg m}^{-3}$	$V_{t, \text{eksp.}} / \text{m s}^{-1}$	$V_{t, \text{teor.}} / \text{m s}^{-1}$
317,40	0,003	0,008
359,56	0,041	0,039
382,98	0,067	0,070
408,32	0,101	0,103
462,72	0,129	0,129



**Slika 30.** Utjecaj razlike gustoća na brzinu taloženja čestica oblika kocke određen eksperimentalno i teorijski ( $d_{\text{ekv}} = 1,29 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ;  $\Psi = 0,806$ ;  $\rho_{\text{č}} = 1388,67 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $w_G = 0,5-1,0$ ).





**Slika 31.** Usporedba eksperimentalno i teorijski dobivenih vrijednosti brzina taloženja čestica oblika kocke u otopinama glicerola različitih gustoća ( $d_{\text{ekv}} = 1,29 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ;  $\Psi = 0,806$ ;  $\rho_{\text{č}} = 1388,67 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $w_G = 0,5-1,0$ ).

**Tablica 11.** Usporedba teorijski i eksperimentalno dobivenih vrijednosti brzina taloženja čestica oblika kocke.

Razlika gustoća	Eksperimentalno određena brzina taloženja	Teorijski određena brzina taloženja
$\Delta\rho / \text{kg m}^{-3}$	$V_{t, \text{eksp.}} / \text{m s}^{-1}$	$V_{t, \text{teor.}} / \text{m s}^{-1}$
128,81	0,007	0,009
170,97	0,078	0,052
194,39	0,106	0,091
219,73	0,148	0,139
274,13	0,178	0,180

## **4. RASPRAVA**

Optjecanje je pojava relativnog gibanja čvrstog tijela i fluida koja se može odvijati tako da fluid opstrujava oko čvrstog nepokretnog tijela ili na način da se čvrsto tijelo giba u mirujućem sloju fluida potpuno ili djelomično uronjeno u njega. U oba slučaja pravilnosti su identične. Bitno je da postoji relativna brzina gibanja između čvrstog tijela i fluida, što je osnovna karakteristika ovakvog hidrodinamičkog sustava. Optjecanje je temelj mnogih jediničnih operacija procesnog inženjerstva poput gravitacijskog i centrifugalnog taloženja, filtracije, kristalizacije, fluidizacije te brojnih katalitičkih procesa i procesa obrade otpadnih voda.

Ovisno o vrijednosti Reynoldsove značajke, optjecanje može biti laminarno, prijelazno ili turbulentno. Laminarno se odvija pri malim vrijednostima Reynoldsove značajke, tj. kada se čvrste čestice gibaju kroz fluid takvom brzinom da ne izazivaju veće poremećaje u strukturi toka fluida. Nasuprot tome, turbulentno optjecanje se zbiva pri većim vrijednostima Reynoldsove značajke. Čvrste čestice u ovom slučaju izazivaju poremećaje u strukturi fluida. Između ova dva granična slučaja nalazi se prijelazno optjecanje koje karakterizira djelomično narušavanje slojevitosti i posljedično miješanje slojeva fluida.

Taloženje čestica predstavlja gibanje čvrstih čestica kroz mirujući fluid i njihovu akumulaciju na dnu s ciljem odvajanja nazočnih faza, a klasificira se kao podvrsta optjecanja. Ovisno o fizikalnim karakteristikama čvrstih čestica i fluida te masenom udjelu čestica u analiziranom heterogenom sustavu, taloženje može biti ometano i neometano. Ukoliko su čestice dovoljno udaljene jedna od druge tako da ne dolazi do preklapanja brzinskih profila koji se formiraju u njihovoj neposrednoj brzini, taloženje se smatra neometanim. U protivnome je ometano.

U kemijsko-inženjerskoj praksi neizostavno je poznavanje fizikalnih karakteristika čvrstih čestica koje sudjeluju u procesu, odnosno jediničnim operacijama. Tu se prije svega misli na podatak o brzini taloženja čestica jer upravo on u znatnoj mjeri diktira način provođenja pojedinih mehaničkih operacija, kao i način njihove kontrole i optimizacije.

U ovom radu analiziran je utjecaj veličine sferičnih čestica, kao i utjecaj oblika čestica, na brzinu neometanog taloženja. Ujedno je ispitan i utjecaj pokretačke sile taloženja, tj. razlike gustoća između ispitivanih čestica i fluida u kojem se provodi taloženje, na tu veličinu. Eksperimentalna ispitivanja provedena su uporabom aparature vlastite izvedbe, detaljno opisanoj u poglavlju 2.1., a dobiveni rezultati uspoređivani su s onima dobivenima teorijskim izrazima, odnosno primjenom  $C_D - Re$  dijagrama.

U prvom dijelu rada ispitan je utjecaj veličine sferičnih čestica, koje se talože u 70 mas. % vodenoj otopini glicerola, na brzinu njihovog taloženja. Postupci određivanja brzine taloženja detaljnije su opisani u poglavlju 2. Na slici 18 prikazan je utjecaj veličine sferičnih čestica na brzinu njihova taloženja određen eksperimentalno i teorijski, dok je usporedba dobivenih vrijednosti dana na slici 19. Iz slike 18 vidljivo je da se povećanjem veličine sferičnih čestica povećava i brzina neometanog taloženja. U ispitivanom području veličina čestica analizirani odnos pokazuje linearnu ovisnost kako za eksperimentalno dobivene, tako i za teorijski određene vrijednosti brzine taloženja.

Za sve ispitivane sferične čestice, nakon eksperimentalnog određivanja brzine taloženja, određene su i vrijednosti Reynoldsovih značajki, a čije su vrijednosti prikazane u tablici 12.

**Tablica 12.** Vrijednosti Reynoldsovih značajki za ispitivane veličine sferičnih čestica.

Čestica, $n$	Promjer čestice, $d_c$	Reynoldsova značajka, $Re = \frac{v_t \times d_c \times \rho_f}{\mu_f}$
/	mm	/
1	3,60	20
2	4,25	26
3	5,13	35
4	6,31	50

Vrijednosti Reynoldsove značajke ukazuju da se optjecanje odvija u prijelaznom području zbog čega se ne može primijeniti Stokesov zakon za određivanje brzine taloženja. Ta veličina u ovom slučaju mora se odrediti isključivo primjenom  $C_D - Re$  dijagrama. Postupak određivanja brzine taloženja primjenom  $C_D - Re$  dijagrama detaljno je opisan u poglavlju 2.2.

Dobiveni eksperimentalni i teorijski podaci o brzini taloženja su usklađeni, tj. fitovani pomoću metode najmanjih kvadrata i opisani linearnim funkcijama, koje su također prikazane na slici 18. Iz visokih vrijednosti koeficijenta korelacije,  $R^2$ , razvidno je izuzetno dobro slaganje eksperimentalnih i teorijski određenih vrijednosti brzina taloženja s vrijednostima dobivenima usklađivanjem.

Na slici 19 prikazana je usporedba eksperimentalno i teorijski dobivenih vrijednosti brzina taloženja sferičnih čestica različitih veličina. Uočava se njihovo vrlo dobro slaganje, što je bilo i za očekivati s obzirom na vrijednost koeficijenta smjera u jednadžbama dobivenih postupkom usklađivanja. Uočena manja odstupanja mogu biti posljedica eksperimentalne pogreške kao i pogreške uslijed nedovoljne preciznosti pri očitavanju vrijednosti na  $C_D - Re$  dijagramu.

Razlika gustoća između analiziranih sferičnih čestica i korištenog fluida također značajno utječe na brzinu taloženja čestica. U biti, razlika gustoća predstavlja pokretačku silu kod taloženja čvrstih čestica. Stoga će u daljnjem dijelu rada biti analiziran utjecaj te razlike na brzinu taloženja sferičnih čestica.

Pri ovim mjerenjima korišteno je pet različitih gustoća vodene otopine glicerola, i to u području  $w_G = 0,5 - 1,0$ . Na slici 20 prikazan je utjecaj razlike gustoća na brzinu taloženja određen eksperimentalno i teorijski. I u ovom slučaju dobiveni podaci ukazuju da se povećanjem razlike gustoća brzina neometanog taloženja linearno povećava. Dobivene linearne ovisnosti su prikazane na slici 20. Također su provjerene vrijednosti Reynoldsovih značajki koje ponovno imaju vrijednosti veće od jedinice što ukazuje na nemogućnost korištenja Stokesovog zakona i neminovnost primjene  $C_D - Re$  dijagrama.

Na slici 21 data je usporedba eksperimentalnih i teorijski dobivenih vrijednosti brzina taloženja pri različitim vrijednostima razlike gustoća. Iz dijagrama se uočava vrlo dobro slaganje vrijednosti brzina taloženja određenih eksperimentalno i teorijski.

U kemijskoj inženjerskoj praksi, pogotovo pri obradi otpadnih voda, vrlo često je potrebno odrediti veličinu čvrstih čestica koje se talože u određenom fluidu, a čija je brzina taloženja poznata. Iz tog razloga je u daljnjem dijelu rada upravo prikazano određivanje veličine sferičnih čestica čije su brzine taloženja poznate.

Nepoznati promjer određivao se za dvije različite sferične čestice primjenom  $C_D - Re$  dijagrama, kojima su prvo eksperimentalno određene brzine taloženja. Na slikama 22 i 23 prezentiran je postupak određivanja veličine čestice sferičnog oblika poznate brzine taloženja primjenom  $C_D - Re$  dijagrama. Iz dijagrama se uočava da su vrijednosti Reynoldsove značajke veće od jedinice što ukazuje na nemogućnost primjene Stokesovog zakona. U tablici 3 i 4 prikazane su vrijednosti nepoznatih promjera određene  $C_D - Re$  dijagramom i izmjerene mikrometarskim vijkom. Kod čestice A, za razliku od čestice B, uočeno je vrlo dobro slaganje između izmjerene i teorijski određene vrijednosti promjera. Razlog odstupanja kod čestice B uz izvršena mjerenja nije moguće sa sigurnošću objasniti. Postoji vjerojatnost da je slaganje općenito bolje kod čestica manjeg promjera, ali za potvrdu te tvrdnje trebalo bi izvršiti dodatna mjerenja s većim brojem čestica različitih veličina.

U procesnom inženjerstvu češće su nazočne čestice nepravilnog oblika, tzv. nesferične čestice. Zato je u daljnjem dijelu rada eksperimentalno i teorijski određivana brzina taloženja nesferičnih čestica poznatih dimenzija i to oblika kocke i valjka.

Prije početka mjerenja, česticama je određen njihov faktor oblika, odnosno sfericitet na način kako je to objašnjeno u poglavlju 2.4., a izračunate vrijednosti prikazane su u tablici 5. U istoj tablici prikazane su i eksperimentalne vrijednosti brzina taloženja čestica različitog oblika određene kao srednja vrijednost pet provedenih mjerenja. Nakon eksperimentalnog određivanja, brzina taloženja ovih čestica određena je i teorijskim putem. Usporedba teorijski i

eksperimentalno određenih brzina taloženja analiziranih nesferičnih čestica prikazana je u tablicama 6 - 8 iz kojih se uočava vrlo dobro slaganje određenih brzina.

U praksi je vrlo često potrebno odrediti promjer čvrstih čestica koje se talože u fluidu, a čija je brzina taloženja poznata. Ukoliko čestica nije sferičnog oblika, pri karakterizaciji njene veličine potrebno je odrediti njen ekvivalentni promjer. U daljnjem dijelu eksperimentalnog rada prikazano je upravo određivanje ekvivalentnog promjera nesferične čestice čija je brzina taloženja poznata. Ekvivalentni promjer određivan je za jednu vrstu čestica, oblika kocke, kojima je prvo primjenom kolone za određivanje brzine taloženja eksperimentalno određena brzina taloženja.

Ovoj čestici je nužno bilo odrediti i faktor oblika, odnosno sfericitet na način kako je objašnjeno u poglavlju 2.4. Izračunate vrijednosti sfericiteta, kao i eksperimentalno dobiveni podaci brzine taloženja, prikazani su u tablici 9. Na slici 27 predložen je postupak teorijskog određivanja ekvivalentnog promjera analizirane čestice. Iz  $C_D - Re$  dijagrama se i ovdje uočava kako je vrijednost Reynoldsove značajke veća od jedinice što ukazuje na nemogućnost određivanja ekvivalentnog promjera primjenom Stokesovog zakona.

U tablici 10 prikazana je usporedba eksperimentalnog i teorijski određenog ekvivalentnog promjera čestice oblika kocke. Primjetno je značajnije odstupanje dobivenih vrijednosti. Razlog odstupanja također može biti nepreciznost eksperimentalnog mjerenja kao i nemogućnost preciznijeg određivanja Reynoldsove značajke u  $C_D - Re$  dijagramu. Za potpunije obrazloženje ovog odstupanja bilo bi potrebno izvršiti detaljnija eksperimentalna i teorijska određivanja s više vrsta nesferičnih čestica.

I kod nesferičnih čestica razlika gustoća između ispitivanih čestica i korištenog fluida značajno utječe na brzinu neometanog taloženja. Mjerenja u ovom dijelu rada su se provela za dvije različite nesferične čestice koje su se taložile u otopinama glicerola pet različitih gustoća.

Na slikama 28 i 30 prikazan je taj utjecaj određen eksperimentalno. Uočava se da povećanjem razlike gustoća brzina neometanog taloženja linearno povećava. Visoke vrijednosti koeficijenta korelacije,  $R^2$ , ukazuju na vrlo dobro slaganje eksperimentalnih podataka s prikazanom funkcijom. Usporedba eksperimentalno i teorijski dobivenih vrijednosti za brzine taloženja nesferičnih čestica prikazana je na slikama 29 i 31. Razvidno je dobro slaganje određenih vrijednosti.

Za cjelovitije zaključke koji se odnose na utjecaj veličine i oblika čestica na brzinu neometanog taloženja bilo bi potrebno izvršiti dodatna mjerenja koja bi obuhvaćala čestice većeg raspona veličina, različitih oblika, kao i uporabu fluida različitih fizikalnih karakteristika.



## **5. ZAKLJUČCI**

Temeljem provedenih eksperimenata i dobivenih rezultata koji se odnose na analizu utjecaja veličine i oblika čestica na brzinu neometanog taloženja, mogu se donijeti sljedeći zaključci:

- Povećanjem veličine sferičnih čestica povećava se i brzina neometanog taloženja. Analizirani odnos pokazuje linearnu ovisnost u ispitivanom području veličina čestica. Eksperimentalno dobiveni rezultati se vrlo dobro slažu s teorijskim.
- Razlika gustoća između sferičnih, odnosno nesferičnih čestica i fluida u kojem se odvija neometano taloženje značajno utječe na brzinu taloženja. Povećavanjem razlike gustoća, linearno raste i brzina neometanog taloženja. Vrijednosti brzina taloženja određene eksperimentalno i teorijski pokazuju vrlo dobro slaganje.
- Usporedba eksperimentalno i teorijski dobivenih rezultata koji se odnose na određivanje veličina čestica ukazuju da je primjenom  $C_D - Re$  dijagrama moguće vrlo uspješno odrediti promjer sferičnih čestica poznate brzine taloženja, kao i ekvivalentni promjer čestica nepravilnog oblika.
- U ovom radu, fizikalne karakteristike ispitivanih sferičnih čestica, kao i fizikalne karakteristike fluida, su bile takve da se optjecanje odvijalo isključivo u prijelaznom hidrodinamičkom području optjecanja ( $1 < Re < 1000$ ). Iz tog razloga nije bila moguća primjena Stokesovog zakona za određivanje brzine taloženja i veličine čestica, već se kao neminovnost nametnula uporaba  $C_D - Re$  dijagrama.
- Za cjelovitije zaključke koji se odnose na utjecaj veličine i oblika čestica na brzinu neometanog taloženja bilo bi potrebno izvršiti dodatna mjerenja koja bi obuhvaćala čestice većeg raspona veličina, različitih oblika, kao i uporabu fluida različitih fizikalnih karakteristika.

## **6. LITERATURA**

1. URL:<https://cdn1.byjus.com/wpcontent/uploads/2016/01/Sedimentation-1-2-700x298.png> (6.7.2021.)
2. URL:<https://raw.githubusercontent.com/qknow/images/ghpages/primary-5-science/mixtures/filtration.jpg> (6.7.2021.)
3. URL:[https://files.mtstatic.com/site\\_4539/7576/0?Expires=1632214910&Signature=CnsmbDhORvVAkzRG3bjyO1eC4WIKEqujFC2rC~V9Tmw0PQYtgam2pK6bX~GoOA65rOd7r5QBCIJz2hZpi6hiOPXO1m-7s~vyTCG4rgT2h1IORhFdbCJiYgrDWEIQSDojs-ruKlpfHtVyhOulyCLPf4soj-kshs5sC0twBhu6M\\_&Key-Pair-Id=APKAJ5Y6AV4GI7A555NA](https://files.mtstatic.com/site_4539/7576/0?Expires=1632214910&Signature=CnsmbDhORvVAkzRG3bjyO1eC4WIKEqujFC2rC~V9Tmw0PQYtgam2pK6bX~GoOA65rOd7r5QBCIJz2hZpi6hiOPXO1m-7s~vyTCG4rgT2h1IORhFdbCJiYgrDWEIQSDojs-ruKlpfHtVyhOulyCLPf4soj-kshs5sC0twBhu6M_&Key-Pair-Id=APKAJ5Y6AV4GI7A555NA) (18.8.2021.)
4. W. J. Beek, K. M. K. Mutzall, J. W. van Heuven, Transport Phenomena, John Wiley & Sons, Inc., 2nd Edit., New York, 2000, str. 98 - 117.
5. R. B. Bird, W. E. Stewart, E. N. Lightfoot, Transport Phenomena, John Wiley & Sons, Inc., 2nd Edit., 2006, str. 137.
6. G. G. Brown et al., Unit Operations, John Wiley & Sons, Inc., 7th Edit., New York, 1960, str. 72 – 84.
7. A. Glasnović, A. Sander, Prijenos tvari i energije (skripta za internu uporabu), Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije, Zagreb, 2016, str. 48 – 57.
8. URL:[https://www.fkit.unizg.hr/\\_download/repository/IV.\\_predavanje\\_PKG\\_3.pdf](https://www.fkit.unizg.hr/_download/repository/IV._predavanje_PKG_3.pdf) (1.9.2021.)
9. A. Glasnović, Prijenos tvari i energije (skripta za internu uporabu), Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije, Zagreb, 2007, str. 47 – 52.

10. R. S. Brodkey, H. C. Hershey, Transport Phenomena – A Unified Approach, McGraw-Hill Book Company, New York, 1988, str. 551 - 637.
11. URL:<https://www.researchgate.net/profile/Laurindo-Leal-Filho/publication/278037091/figure/fig4/AS:668305853534212@1536347940697/Sphericity-of-particles-of-regular-form.ppm> (6.9.2021.)
12. A. J. Geankoplis, Transport Processes and Unit Operations, Prentice-Hall International, Inc., 3rd Edit., New Jersey, 1993, str. 114.
13. M. Pečornik, Tehnička mehanika fluida, Školska knjiga, Zagreb, 1989, str. 240 - 274.
14. URL:<https://d3i71xaburhd42.cloudfront.net/507809d02e6b70bfad5d6e0014542620da5a4b53/2-Figure1-1.png> (26.8.2021.)
15. E. Mitrović Kessler, Prijenos tvari i energije (skripta za internu uporabu), Kemijsko-tehnološki fakultet u Splitu, Split, 1991, str. 81 - 89.
16. F. Zdanski et al., Tehnološke operacije – praktikum, Tehnološko-metalurški fakultet Univerziteta u Beogradu, 5. izdanje, Beograd, 1987, str. 97 – 125.
17. A. Simonović, D. Vuković, S. Cvijović, S. Končar-Đurđević, Tehnološke operacije I – Mehaničke operacije, Tehnološko-metalurški fakultet Univerziteta u Beogradu, 6. izdanje, Beograd, 1987, str. 183 – 198.

## **7. PRILOZI**

- $A$  – površina okomita na smjer strujanja fluida, ( $m^2$ )
- $C_D$  – faktor otpora pri optjecanju, ( $/$ )
- $d_{\check{c}}$  – promjer čvrste čestice, (m)
- $d_{ekv}$  – ekvivalentni promjer nesferičnih čestica, (m)
- $Eu$  – Eulerova značajka, ( $/$ )
- $F_D$  – sila otpora pri optjecanju, (N)
- $F_i$  – sila otpora oblika, (N)
- $F_r$  – sila površinskog trenja, (N)
- $F_U$  – sila uzgona, (N)
- $F_V$  – vanjska sila, (N)
- $g$  – gravitacijsko ubrzanje, ( $m^2 s^{-1}$ )
- $L$  – karakteristična linearna dimenzija čvrstog tijela, (m)
- $m_{\check{c}}$  – masa čvrste čestice, (kg)
- $Re$  – Reynoldsova značajka, ( $/$ )
- $v_r$  – relativna brzina, ( $m s^{-1}$ )
- $v_t$  – brzina taloženja čestice, ( $m s^{-1}$ )

### Grčka slova

- $\mu_f$  – viskoznost fluida, (Pa s)
- $\rho_{\check{c}}$  – gustoća čvrste čestice, ( $kg m^{-3}$ )
- $\rho_f$  – gustoća fluida, ( $kg m^{-3}$ )
- $\psi$  – faktor oblika čestice, tj. sfericitet, ( $/$ )